◄ دكتور المادة: ريم الحاج خليفة

◄ المحاضرة: السابعة

عنوان المحاضرة: تعريف المجموع المباشر والعنصر الجامد و العوادم

**المحتوى العلمي** : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- مبرهنة على الحقل وما يحوي من مثاليات .

٢- تعريف المجموع المباشر والعنصر الجامد وامثلة .

٣- العوادم ثم بعض التمارين .بالإضافة لحل الوظائف .

---

**مبرهنة:** إذا كان $F$ حقلاً ما فإن $F$ يحوي مثاليين هما المجموعة $\{0\}$ والحقل $F$ .

**البرهان :** ليكن $F$ حقلاً ما وَ $A$ مثالياً في $F$ عندئذٍ

إذا كانت $A=\{0\}$ عندئذٍ يتم المطلوب حسب مبرهنة سابقة (أي حلقة ما تحوي مثاليين هما المجموعة $\{0\}$ والحلقة )
وإذا كان $A\neq\{0\}$ عندئذٍ يوجد عنصر $a\in A$ وهو مغاير للصفر ولما كان $F$ حقلاً فإن العنصر $a$ يملك مقلوب في $F$ وذلك حسب مبرهنة سابقة (إذا وجد مقلوب في الحلقة فإن الحلقة تساوي المثالية )⇐ $A=F$

**تعريف :** ليكن $\mathcal{R}$ حلقة وَ $A_1,A_2,\ldots,A_n$ مجموعة من المثاليات اليسارية (اليمينية) في $\mathcal{R}$ .

نرمز عادة للمجموع المباشر للمثاليات $A_1,A_2,\ldots,A_n$ بالرمز: $\bigoplus_{i=1}^{n}A_i$ أو $\sum_{i=1}^{n}\oplus A_i$
وتعني كل حد $A_i$ حداً مباشراً .

**نتيجة :** ليكن $\mathcal{R}$ حلقة وَ $A$ مثالياً يسارياً (يمينياً ) في $\mathcal{R}$ عندئذٍ يكون المثالي اليساري (اليميني ) $A$ هو حداً مباشراً في $\mathcal{R}$ إذا وجد مثالي يساري (يميني) $B$ في $\mathcal{R}$ تحقق $\mathcal{R}=A\oplus B$ .

**تعريف:** ليكن $\mathcal{R}$ حلقة وليكن $a\in\mathcal{R}$ نقول عن العنصر $a$ أنه جامد في $\mathcal{R}$ إذا تحقق $a^2=a$

**نتيجة :** ليكن $\mathcal{R}$ حلقة عندئذٍ إذا كان العنصر $a\in\mathcal{R}$ عنصراً جامداً فإن $(1-a)\in\mathcal{R}$ هو أيضاً عنصر جامد .

**أمثلة :**

١- في أي حلقة واحدية $\mathcal{R}$ كلاً من العددين $0,1$ هو عنصر جامد في $\mathcal{R}$ .
لأن $1^2=1\ ,0^2=0$ تحقق شروط أن مربع العنصر يساوي نفسه فهو عنصر جامد .

٢- في الحلقة $\mathbb{Z}_6=\{0,1,2,3,4,5\}$ كلا من $0,1,3,4$ عناصر جامدة .

٣- ليكن $\mathcal{R}$ حلقة وَ $\mathcal{M}_2(\mathcal{R})$ حلقة المصفوفات عندئذٍ هل المصفوفتان $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ جامدتان .

جامدة $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

جامدة $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$

**نتيجة :**

إذا كانت $\mathcal{R}$ حلقة وَ $e \in \mathcal{R}$ عنصراً جامداً عندئذٍ كلاً من $\mathcal{R}e, \mathcal{R}(1-e)$ هي حدود مباشرة في $\mathcal{R}$ بلإضافة

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}e \oplus \mathcal{R}(1-e)$$

**أمثلة :**

١- حلقة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ نلاحظ بأن العناصر $3,4$ هي عناصر جامدة في $\mathbb{Z}_6$ وبالاعتماد على النتيجة السابقة نستطيع أن نكتب $\mathbb{Z}_6 = 4\mathbb{Z}_6 \oplus 3\mathbb{Z}_6$

٢- في الحلقة $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$ نلاحظ بأنها لا يوجد فيها عناصر جامدة سوى العنصرين $0,1$ لأنه لو ربعنا أي عنصر في الحلقة $\mathbb{Z}_5$ نجد بأنه لا يساوي نفسه .

**العوادم:** إذا كانت $\mathcal{R}$ حلقة وليكن $a \in \mathcal{R}$ المجموعة $r(a) = \{x : x \in \mathcal{R}\,; ax = 0\}$ تشكل مثالياً يسارياً في $\mathcal{R}$. عندئذٍ نسمي المجموعة $r(a)$ العادم اليميني للعنصر $a$ في $\mathcal{R}$ .

$l(a) = \{x : x \in \mathcal{R}\,; xa = 0\}$ ونسمي المجموعة $l(a)$ العادم اليساري للعنصر $a$ في $\mathcal{R}$ .

**تمارين :**

١- ليكن $\mathcal{R}$ حلقة تبديلية وواحدية وليكن $A, B$ مثاليين في $\mathcal{R}$ محققاً $\mathcal{R} = A + B$ .

أثبت أن $A.B = A \cap B$

**الحل :**

وجدنا حسب نظرية سابقة (إذا كانت $\mathcal{R}$ حلقة تبديلية وكان $A, B$ مثاليين في $\mathcal{R}$ فإن $A.B \subseteq A \cap B$ )

(في الامتحان نكتفي بذكر نص المبرهنة لا داعي لاثباتها)

والآن سوف نثبت الاحتواء المعاكس لكي تتحقق المساواة .

ليكن $x \in A \cap B$ بما أن $\mathcal{R} = A + B$ فرضاً وأن $1 \in \mathcal{R}$ لأنها حلقة واحدية فإنه يوجد

$$1 = a + b \quad : a \in A \;\; , \quad b \in B$$

نضرب الطرفين بالعنصر $x$ :

$$x = \underbrace{ax}_{\in A.B} + \underbrace{bx}_{\in A.B} \in A.B \implies x \in A.B \Rightarrow A \cap B \subseteq A.B \Rightarrow A \cap B = A.B$$

٢- ليكن $\mathcal{R} \neq 0$ حلقة تبديلية وواحدية تحقق الشرط التالي :

أياً كان العنصر $0 \neq a \in \mathcal{R}$ فإن $a\mathcal{R} = \mathcal{R}$ والمطلوب أثبت أن الحلقة $\mathcal{R}$ تشكل حقل .

**الحل :**

بما أن الحلقة تبديلية وواحدية إذاً تحوي عنصرين على الأقل .

فيكفي حتى تكون الحلقة $\mathcal{R}$ تشكل حقلاً أن نبرهن أن لكل عنصر من $\mathcal{R}$ مغاير للصفر يملك مقلوب . ( الشروط الباقية محققة من نص البرهان ).

ليكن $0 \neq a \in \mathcal{R}$ وحسب الفرض لدينا $a\mathcal{R} = \mathcal{R}$ وبما أن $1 \in \mathcal{R}$ فرضاً فإن $1 \in a\mathcal{R}$ وبالتالي يوجد عنصر $b \in \mathcal{R}$ بحيث $\underbrace{ab = ba}_{\text{تبديلية } \mathcal{R}} = 1 \Rightarrow ab = 1$ أي أن العنصر $a$ قابل للقلب في $\mathcal{R} \Leftarrow \mathcal{R}$ تشكل حقل .

٣- ليكن $\mathcal{R}$ حلقة وَ $A, B$ مثاليين يساريين في $\mathcal{R}$ ولتكن المجموعة $(A:B) = \{x : x \in \mathcal{R}; xB \subseteq A\}$ أثبت أن المجموعة $(A:B)$ هي مثالي في $\mathcal{R}$ .

**الحل:** بما أن $0.B = 0 \in A$ أي أن المجموعة $(A:B) \neq \emptyset$ ليكن $x, y \in (A:B)$ عندئذٍ :

$x.B \subseteq A \ , \ y.B \subseteq A$ بفرض أن $a \in (x-y)B$ عندئذٍ يوجد $b \in B$

$$(x-y)b = \underbrace{xb}_{\subseteq A} - \underbrace{yb}_{\subseteq A} \subseteq A \Longrightarrow (x-y)B \subseteq A \Longrightarrow x - y \in (A:B)$$

إذاً الشرط الأول محقق . (شرط الزمرة الجزئية بالنسبة لعملية الجمع ).

ليكن $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ عندئذٍ :

$$(r_1 x r_2)B = (r_1 x) \underbrace{(r_2 B)}_{\subseteq B \text{ لانه مثالي يساري}} \subseteq (r_1 x)B = r_1 \underbrace{(xB)}_{\text{حسب تعريف المجموعة}} \subseteq \underbrace{r_1 A}_{\subseteq A \text{ لانه مثالي يساري}} \subseteq A$$

إذاً الشرط الثاني محقق . هذا يؤدي إلى أن المجموعة $(A:B)$ مثالي في $\mathcal{R}$ .

٤- ليكن $\mathcal{R}$ حلقة وَ $e \in \mathcal{R}$ عنصر جامد عندئذٍ أثبت أن $r(e) = (1-e)\mathcal{R} \ , l(e) = \mathcal{R}(1-e)$

**الحل :** سنبرهن أن $r(e) = (1-e)\mathcal{R}$ : $r(e) = \{x : x \in \mathcal{R} ; ex = 0\}$

ليكن $x \in r(e)$ حيث $r(e)$ هو العادم اليميني عندئذٍ $ex = 0$:

ومن جهة أخرى $1 = 1 + e - e$

نضرب الطرفين بـ $x \Longleftarrow x = \underbrace{ex}_{=0} + (1-e)x$

$$x = (1-e)x \in (1-e)\mathcal{R} \Rightarrow x \in (1-e)\mathcal{R}$$

وبالتالي $r(e) \subseteq (1-e)\mathcal{R}$

ومن جهة ثانية ليكن $y \in (1-e)\mathcal{R}$ عندئذٍ يوجد $r \in \mathcal{R}$ بحيث $y = (1-e)r$ نضرب الطرفين بـ $e \Leftarrow$

$$ey = e(1-e)r = \left(e - \underbrace{e^2}_{e^2 = e \text{ حسب تعريف العنصر الجامد}}\right) r = (e-e)r = 0 \Rightarrow ey = 0 \Rightarrow y \in r(e)$$

وبالتالي $(1-e)\mathcal{R} \subseteq r(e)$

$$r(e) = (1-e)\mathcal{R} \Longleftarrow$$

٥- لتكن لدينا الحلقة $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ أثبت أن المجموعة

$$I = \{(a, 2b) \ : a, b \ \in \mathbb{Z}\}$$

مثالية في الحلقة المعطاة . **( وظيفة )**

**الحل :** (العمليتين المعرفتين هما عملية ضرب وجمع المساقط المألوفة)

$I \neq \emptyset$ لأنه $(0,0) \in I$

ليكن $x, y \in I$ : $x = (a, 2b) \quad , \quad y = (c, 2d) \quad : a, b, c, d \ \in \mathbb{Z}$

$$x - y = (a, 2b) - (c, 2d) = (a - c, 2(b - d)) \in I$$

اي أن الشرط الأول محقق

ليكن $\forall r, r_1 \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ : $g, k, g_1, k_1 \in \mathbb{Z}:\ r = (g, k)\ , r_1 = (g_1, k_1)$

$$rxr_1 = \underbrace{((g,k)(a,2b))}_{\text{العملية تجميعية}}(g_1,k_1) = (g.a, k.2b)(g_1,k_1) = (g.a.g_1, k.2b.k_1) \in I$$

اي أن الشرط الثاني محقق ومنه $I$ مثالي .

لندرج حل وظيفة المحاضرة السابقة

**مبرهنة ٥ :** لتكن $\mathcal{R}$ حلقة وَ $A_1, A_2, \dots, A_n$ مجموعة من المثاليات اليسارية (اليمينية) في $\mathcal{R}$ عندئذٍ : $\prod_{i=1}^{n} A_i = \{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}.a_{i2}.\dots.a_{in} : a_{ij} \in A_i\}$ مثالي يساري (يميني) في $\mathcal{R}$ . **( الطلب الثاني )**

**الحل :** سنبرهن اليسارية : بما أن كلاً من $A_i$ مجموعات غير خالية فإن $\prod_{i=1}^{n} A_i$ غير خالي.

ليكن $x, y \in \prod_{i=1}^{n} A_i$ :

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}.a_{i2}.\dots.a_{in} : \forall a_{in} \in A_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} b_{i1}.b_{i2}.\dots.b_{in} : \forall b_{in} \in A_i$$

$$x - y = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}.a_{i2}.\dots.a_{in} - \sum_{i=1}^{n} b_{i1}.b_{i2}.\dots.b_{in}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i1}.a_{i2}.\dots.a_{in} + \sum_{i=1}^{n} -(b_{i1}.b_{i2}.\dots.b_{in})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_{i1}.a_{i2}.\dots.a_{in}) - (b_{i1}.b_{i2}.\dots.b_{in}) \in \prod_{i=1}^{n} A_i$$

اي أن الشرط الأول محقق

فإن $\forall r \in \mathcal{R}$

$$rx = r\sum_{i=1}^{n} a_{i1}.a_{i2}.\dots.a_{in} = \sum_{i=1}^{n} r(a_{i1}.a_{i2}.\dots.a_{in}) \in \prod_{i=1}^{n} A_i$$

اي أن الشرط الثاني محقق ومنه المجموعة $\prod_{i=1}^{n} A_i$ مثالي يساري .

## <انتهت المحاضرة>

إعداد: لبنى الطون – محمد فهمي القاضي – أحمد ابو التوت