◀ دكتور المادة: هدى الشماط

نظري

◀ المحاضرة الثامنة عنوان المحاضرة: الاشتقاق الدوال لعدة متحولات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـالمشتق الاتجاهي لتابع لعدة متحولات

٢ـتفاضلات الدوال الحقيقية لعدة متحولات (حالة خاصة : الدوال لمتحولين)

٣ـمشتق فريشيه (حالة خاصة : الدوال لمتحولين)

تعريف المشتق الاتّجاهي:

لتكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ حيث Dمفتوحة وليكن $c \in \overset{\circ}{D}$ ولنفرض أن $u \in \mathbb{R}^n$ (أي u متجه) بحيث $||u|| = 1$

فإذا وجدت النهاية:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+hu) - f(c)}{h}$$

نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة c باتجاه u

- **هذا التعريف ليس إلا تعميم للمشتق الجزئي لدالة f الذي تعرفنا عليه سابقاً و ذلك عندما نعتبر الشعاع u هو أحد الأشعة القانونية $e_1, \dots, e_n$:**

فمثلاً إذا أخذنا $u = e_1(1,0,0,\dots,0)$ نجد أن $||u|| = 1$ و أنّ:

$$c + hu = c + he_1 = (c_1, c_2, \dots, c_n) + h.(1,0,0,\dots,0)$$
$$= (c_1 + h, c_2, \dots, c_n)$$

و حسب تعريف المشتق الاتجاهي يكون :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+hu) - f(c)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(c_1+h, c_2, c_3 \dots, c_n) - f(c_1, c_2, c_3 \dots c_n)}{h} = \frac{\partial f(c)}{\partial x_1}$$

تمرين ١: لتكن $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ والمعرفة بـ:

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ولتكن $c(0,0)$ و $u = (\alpha, \beta)$ بحيث $\alpha^2 + \beta^2 = 1$، أوجد $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$

الحل: بداية لنتحقق أن نظيم الشعاع المعطى يساوي إلى الواحد (و هو شرط ضروري من تعريف المشتق الاتجاهي) :

$$\|u\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$$

الآن نوجد النقاط التي سنعوضها في التعريف :

$$c + hu = (0,0) + h(\alpha + \beta) = (h\alpha + h\beta)$$

$$\Longrightarrow f(c+hu) = f(h\alpha, h\beta) = \frac{h^3 \alpha \beta^2}{h^2(\alpha^2+\beta^2)} = \frac{h\alpha\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)} = h\,\alpha\,\beta^2$$

$: (\alpha^2 + \beta^2 = 1)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+hu) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h\alpha\beta^2 - 0}{h} = \alpha\beta^2$$

تمرين ٢ : لتكن لدينا :

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \|x\|^2$$

ولتكن $c \in \mathbb{R}^n$ داخلية وليكن :

$$\mathrm{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

أوجد $\frac{\partial f}{\partial u}(c)$ ؟

الحل: نتحقق من شرط كون النظيم يساوي الواحد:

$$\|u\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}} = \sqrt{n\frac{1}{n}} = 1$$

الآن نوجد النقاط التي سنعوضها في التعريف :

$$c + hu = (c_1, c_2, \dots, c_n) + h\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
$$= \left(c_1 + \frac{h}{\sqrt{n}}, c_2 + \frac{h}{\sqrt{n}}, \dots, c_n + \frac{h}{\sqrt{n}}\right)$$
$$\Longrightarrow f(c + hu) = (c_1 + \frac{h}{\sqrt{n}})^2 + (c_2 + \frac{h}{\sqrt{n}})^2 + \cdots + (c_n + \frac{h}{\sqrt{n}})^2$$

بنشر هذه المقادير :

$$= \left({c_1}^2 + 2\frac{c_1 h}{\sqrt{n}} + \frac{h^2}{n}\right) + \left({c_2}^2 + 2\frac{c_2 h}{\sqrt{n}} + \frac{h^2}{n}\right) + \cdots . + \left({c_n}^2 + 2\frac{c_n h}{\sqrt{n}} + \frac{h^2}{n}\right)$$

نجمع الحدود المتشابهة :

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + \frac{2h}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} c_i + h^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}}_{n.\frac{1}{n}=1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + \frac{2h}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} c_i + h^2$$

و الآن نحسب $f(c)$:

$$f(c) = f(c_1, c_2, \dots, c_n)$$
$$= ||c||^2 = {c_1}^2 + {c_2}^2 + \cdots + {c_n}^2 = \sum_{i=1}^{n} {c_i}^2$$

الآن و قد أصبح لدينا كل ما نحتاجه نعوض في التعريف :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c + hu) - f(c)}{h} \lim_{h\to 0} \frac{(\sum_{i=1}^{n} c_i^2 + \frac{2h}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} c_i + h^2) - \sum_{i=1}^{n} {c_i}^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} c_i + h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} c_i + h$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} c_i$$

تفاضلات الدوال الحقيقية لعدة متغيرات:

لتكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ حيث D مجموعة مفتوحة. ولتكن $c(a,b) \in D^\circ$ ولنفرض وجود عددين حقيقين h,k بحيث $\|(\mathrm{h},\mathrm{k})\| < \delta$ فإذا وجد عددان B,A بحيث يحققان أن :

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \mu(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

وبشرط :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \mu(h,k) = 0$$

نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق (للمفاضلة) في $c(a,b)$.

- **لإيجاد A : نفرض أن $k = 0$ ومنه**

$$f(a+h,b) - f(a,b) = Ah + \mu(h,0)\sqrt{h^2}$$

نقسم الطرفين على h

$$\frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = A \mp \mu$$

نأخذ نهاية الطرفين عندما تسعى h إلى الصفر

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = \lim_{h\to 0}\big(A + \mu(h,0)\big) = 0$$

ومنه : $= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \mathrm{A} + 0$

ومنه فإن A هي المشتق الجزئي الأول بالنسبة لـ x عند النقطة c

- **لإيجاد B نأخذ K=0:** و بنفس الطريقة نجد أن: $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = B$

وبتعويض قيمة A,B في العلاقة $f(a+h,b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \mu\sqrt{h^2+k^2}$ نجد أن:

$$\boxed{f(a+h,b+k) - f(a,b) = f_x(a,b)h + f_y(a,b)k + \mu\sqrt{h^2+k^2}}$$

بشرط :

$$\boxed{\lim_{(h,k)\to(0,0)} \mu(h,k) = 0}$$

عندئذٍ الدالة f قابلة للاشتقاق (المفاضلة) في (a,b).

ملاحظة : إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق هذا يعني أن المشتقات الجزئية تكون موجودة ولكن العكس ليس بالضرورة أن يكون صحيح .

مثال ١:

لتكن

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ادرس قابلية الاشتقاق في $(0,0)$.

الحل: نعتمد على التعريف ، فأولاً نوجد المشتقات الجزئية عند النقطة المطلوبة

وحسب تعريف الاشتقاق الجزئي عند نقطة :

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2}}{h} = 0$$

و أيضاً :

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0$$

الآن نحسب المقدار:

$$f(0+h,0+k) = f(h,k) = \frac{hk^2}{h^2+k^2}$$

$$f(0,0) = 0$$

$$f(0+h,0+k) - f(0,0) = hf_x(0,0) + hf_y(0,0) + \mu\sqrt{h^2+k^2}$$

بالتعويض نجد ..

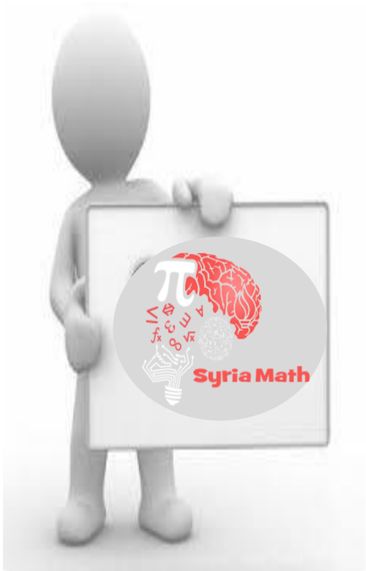
$$\frac{hk^2}{h^2+k^2} - 0 = 0 + 0 + \mu\sqrt{h^2+k^2}$$

بعزل μ:

$$\Rightarrow \mu(h,k) = \frac{hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

و لكن هل هذا $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \mu(h,k) = 0$ ؟؟؟؟

نلاحظ أنه على الأقل إذا كانت $h = k$ يصبح



$$\mu(h,h) = \frac{h^3}{(2h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(2\ )^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

و بالتالي :

$$\lim_{h\to 0} \mu(h,h) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{8}} \neq 0$$

وبالتالي f غير قابلة للاشتقاق عند المبدأ.

مثال٢: لتكن

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = x^2 + 2xy$$

ادرس قابلية الاشتقاق في (a,b)

الحل:

$$f(a+h,b+k) = (a+h)^2 + 2(a+h)(b+k)$$
$$= a^2\ + 2ah + h^2 + 2ab + 2ak + 2bh + 2hk$$

و أيضاً لدينا :

$$f(a,b) = a^2 + 2ab$$

الآن نشتق جزئياً ثم نعوض (a,b):

$$f_x(x,y) = 2x + 2y \Rightarrow f_x(a,b) = 2a + 2b$$
$$f_y(x,y) = 2x \qquad \Rightarrow f_y(a,b) = 2a$$

و الآن نعوض في العلاقة :

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = hf_x(a,b) + kf_y(a,b) + \mu\sqrt{h^2+k^2}$$

فنجد أن :

$$(a^2\ + 2ah + h^2 + 2ab + 2ak + 2bh + 2hk) - (a^2 + 2ab)$$
$$= 2ah + 2bh + 2ak + \mu\sqrt{h^2+k^2}$$

بالاختصار و الإصلاح نجد أن :

$$\boxed{\mu(h,k)=\frac{h^2+2hk}{\sqrt{h^2+k^2}}}$$

لنرى حسب التعريف أن $lim_{(h,k)\to(0,0)}\,\mu(h,k)=0$:

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\delta>0,0<\|(h,k)-(0,0)\|<\delta\Rightarrow|\mu-0|<\varepsilon$$

$$|\mu-0|=\left|\frac{h^2+2hk}{\sqrt{h^2+k^2}}-0\right|=\left|\frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}+\frac{2hk}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|\le\frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}+\frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$=2\sqrt{h^2+k^2}<2\delta=\varepsilon$$

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0\,,\|(h,k)-(0,0)\|<\delta\Rightarrow|\mu-0|<\varepsilon$$

$$\Longrightarrow|\mu-0|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\lim_{(h,k)\to(0,0)}\mu=0$$

لاحظ أن $(h-k)^2\ge 0$
$\Leftrightarrow h^2+k^2-2kh\ge 0$
$\Leftrightarrow h^2+k^2\ge 2hk$

أي أن f قابلة للاشتقاق.

مشتق فريشيه:

لتكن $c=(a,b)\in\mathbb{R}^2$، نعرّف التابع: $d_cf:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$(h,k)\mapsto d_cf(h,k)=hf_x(a,b)+kf_y(a,b)$$

بأنه مشتق فريشيه (و هي دالة خطية في $f_x(a,b)\&\,f_y(a,b)$)

مثال:

أوجد $d_cf(x-c)$ للدالة:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$f(x,y)=x^3+4xy^2+2xy\sin x$$

حيث $c(0,-2)$.

الحل:

$$x-c=(x,y)-(0,-2)=(\underbrace{x}_{h},\underbrace{y+2}_{k})$$

نوجد المشتقات الجزئية:

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 4y^2 + 2y\sin x + 2xy\cos x$$

$$\Rightarrow f_x(0,-2) = 3(0) + 4(-2)^2 + 2(-2)\sin 0 + 2(0)(-2)\cos 0$$

$$\Rightarrow f_x(0,-2) = 16$$

$$f_y(x,y) = 8xy + 2x\sin x$$

$$\Rightarrow f_y(0,-2) = 8(0)(-2) + 2(0)\sin 0 = 0$$

ومنه

$$d_{(0,-2)}f(x,y+2) = x(16) + (y+2)(0) = 16x$$

انتهت المحاضرة

مجموعة السنة الأولى: طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق ٢٠١٧	مجموعة السنة الثانية : Improve Our Mathematics	صفحتنا على فيسبوك: IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/

إعداد: منى شغل – سندس العص – نذير تيناوي