نظري

◄ دكتور المادة: هدى الشماط

◄ المحاضرة السابعة   عنوان المحاضرة: الاشتقاق الدوال لعدة متحولات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ مثال عن الاستمرار

٢ـ المشتقات الجزئية الصرفة

٣ـ المشتقات الجزئية المختلطة

٤ ـ شرط تساوي المشتقات الجزئية المختلطة من خلال مبرهنة

مثال: لتكن الدالة $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ المعرفة بالشكل $f(x,y)=(x+y,x-y)$ بين أن f مستمرة على كامل $\mathbb{R}^2$.

الحل : حتى تكون الدالة f مستمرة على كامل $\mathbb{R}^2$ يجب أن تكون مستمرة عند كل نقطة $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

أي من أجل أي نقطة $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ يجب أن يتحقق أن:

$$\forall \varepsilon>0\,;\exists\delta>0:\ \|(x,y)-(a,b)\|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \Rightarrow \|f(x,y)-f(a,b)\|<\varepsilon$$

لدينا :

$$\begin{aligned}\|f(x,y)-f(a,b)\| &= \|(x+y,x-y)-(a+b,a-b)\|\\ &= \|((x-a)+(y-b),(x-a)-(y-b))\|\\ &= \sqrt{[(x-a)+(y-b)]^2+[(x-a)-(y-b)]^2}\end{aligned}$$

$$=\sqrt{(x-a)^2+2(x-a)(y-b)+(y-b)^2+(x-a)^2-2(x-a)(y-b)+(y-b)^2}$$

$$=\sqrt{2(x-a)^2+2(y-b)^2}=\sqrt{2}\,\underbrace{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}_{<\delta}<\sqrt{2}\delta$$

نضع $\varepsilon = \sqrt{2}\delta$ و بالتالي $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ فيتحقق أنه:

$$\forall \varepsilon > 0 \,;\, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} > 0 : \ \|(x,y)-(a,b)\| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta \Rightarrow$$
$$\|f(x,y)-f(a,b)\| < \sqrt{2}\delta = \varepsilon$$

و بالتالي الدالة مستمرة عند (a,b) و بما أنها نقطة اختيارية من $\mathbb{R}^2$ نجد أن الدالة مستمرة على كامل $\mathbb{R}^2$.

مشتقات الدوال الحقيقة التابعة لعدة متغيرات:

لتكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ حيث D مفتوحة ولتكن $c \in D^\circ$ فإذا وجدت النهاية التالية: (حيث $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c_1+h, c_2, c_3 \dots \dots, c_n) - f(c_1, c_2, c_3 \dots \dots . c_n)}{h}$$

عندئذ نقول أن للدالة مشتق جزئي بالنسبة للمتغير الأول في النقطة c، ونرمز له بـ $\frac{\partial f}{\partial x_1}(c)$ أو $f_{x_1}(c)$.

وكذلك الأمر إن المشتق الجزئي بالنسبة للمتغير الثاني يعطى بـالشكل::

$$f_{x_2}(c) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c_1, c_2+h, c_3 \dots \dots, c_n) - f(c_1, c_2, c_3 \dots \dots . c_n)}{h}$$

وهكذا....حتى نصل إلى المشتق الجزئي بالنسبة للمتغير الأخير و الذي يعطى بالشكل :

$$f_{x_n}(c) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c_1, c_2, c_3 \dots \dots, c_n+h) - f(c_1, c_2, c_3 \dots \dots . c_n)}{h}$$

و بذلك نحصل على n مشتقاً جزئياً للدالة f في النقطة c ندعوها **المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى.**

- الآن لدينا الدالة :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D^\circ \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$c \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$$

ولنأخذ (مثلاً $i = 1$ و كل ما سنطبقه ينطبق من أجل جميع $1 \le i \le n$) :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} : D^\circ \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$c \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)$$

ولنحسب مشتقه الجزئية بالنسبة للمتحول الأول ثم للثاني :

$$1)\ \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(c) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(c)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f_{x_1}(c_1 + h, c_2, c_3 \dots \dots, c_n) - f_{x_1}(c_1, c_2, c_3 \dots \dots . c_n)}{h}$$

$$2)\ \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}(c) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c)$$

$$= \lim_{x \to h} \frac{f_{x_1}(c_1, c_2 + h, c_3 \dots \dots, c_n) - f_{x_1}(c_1, c_2, c_3 \dots \dots . c_n)}{h}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} f_{x_1} = \left(f_{x_1}\right)_{x_2} = f_{x_1 x_2}}$$

يجب هنا الانتباه لترتيب الرموز ففي الحالة العامة يوجد فرق بين أن نشتق أولاً بالنسبة لـ x_1 و من ثم بالنسبة لـ x_2 و بين العكس

تعريف المشتقات الجزئية الصرفة والمختلطة من المرتبة $k \geq 1$:

لتكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ و D مجموعة مفتوحة و $c \in D^\circ$ ولتكن المشتقات الجزئية الصرفة و المختلطة من المرتبة k التالية:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}, \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1} \partial y}, \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-2} \partial y^2}, \quad \dots\dots\dots \quad, \frac{\partial^k f}{\partial x\, y^{k-1}}, \frac{\partial^k f}{\partial y^k}$$

إنّ المشتقات الجزئية الصرفة هي التي تحوي اشتقاقاً بالنسبة لمتغيرٍ واحدٍ فقط:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}, \frac{\partial^k f}{\partial y^k}$$

أما المشتقات الجزئية المختلطة فهي التي تحوي اشتقاقاً بالنسبة الى اكثر من متغيرٍ واحد مثل:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1}\partial y}, \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-2}\partial y^2}, \quad \dots\dots\dots \quad , \frac{\partial^k f}{\partial x\, y^{k-1}}$$

مثال: أوجد المشتقات الجزئية الصرفة والمختلطة للدالة:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = x^3y^5$$

الحل: (عند إيجاد f_x نشتق f بالنسبة لـ x ونعتبر y ثابتاً)

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^5 \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 5x^3y^4$$
$$f_{xx} = 6xy^5 \qquad f_{yy} = 20x^3y^3$$
$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 15x^2y^4 \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 15x^2y^4$$

هنا المشتقات المختلطة كانت متساوية و هذا لا يتحقق دوماً و سنرى ذلك في المثال التالي:

مثال: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

أوجد $f_y(x,y)$, $f_x(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$

الحل: بما أن الدالة المعطاة ذات فروع فلحساب المشتقات عند النقطة $(0,0)$ لا بد من استخدام التعريف (النهاية) أما عند كل نقطة (x,y) مغايرة للـ $(0,0)$ يمكن الاشتقاق مباشرةً :

فلحساب $f_x(0,0)$ نطبق مفهوم النهاية

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

و لحساب $f_x(x,y)$ حيث $(x,y) \neq (0,0)$ فيمكن الاشتقاق مباشرةً:

$$f_x(x,y) = \frac{y^2(x^2+y^2) - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

و هو المشتق من المرتبة الأولى بالنسبة لـ x

و بنفس الأسلوب نجد أن :

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

الآن لنحسب المشتقات المختلطة عند النقطة $(0,0)$:

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(0+h,0) - f_y(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0+h,0) - f_x(0,0)}{h} = \frac{1-0}{h} = \infty$$

نلاحظ أن $f_{yx}(0,0) \neq f_{xy}(0,0)$.

مبرهنة:

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ حيث D مجموعة مفتوحة ولتكن $c \in D^\circ$ و لنفرض تحقق الشرطين:

١) $f_{yx}(c)$ ، $f_{xy}(c)$ ، $f_x(c)$ ، $f_y(c)$ موجودة على الساحة D.

٢) f_{yx} ، f_{xy} مستمرة على الساحة D.

عندها يكون : $\boxed{f_{xy}(c) = f_{yx}(c)}$

مبرهنة (تعميم) :

لتكن الدالة $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ حيث D مجموعة مفتوحة.
ولتكن $c \in D^\circ$ ولنفرض أن المشتقات الجزئية الصرفة حتى المرتبة $m-1$ (بما فيها $m-1$)موجودة في الساحة D والمشتقات المختلطة حتى المرتبة m موجودة ومستمرة عند النقطة c، عندئذٍ تكون قيمة أي مشتق جزئي مختلط في النقطة c مستقل عن الترتيب الذي نجري به عمليات الاشتقاق.

انتهت المحاضرة

صفحتنا على فيسبوك: IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/	مجموعة السنة الثانية : Improve Our Mathematics	مجموعة السنة الأولى: طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق ٢٠١٧

إعداد: منى شغل – سندس العص – نذير تيناوي