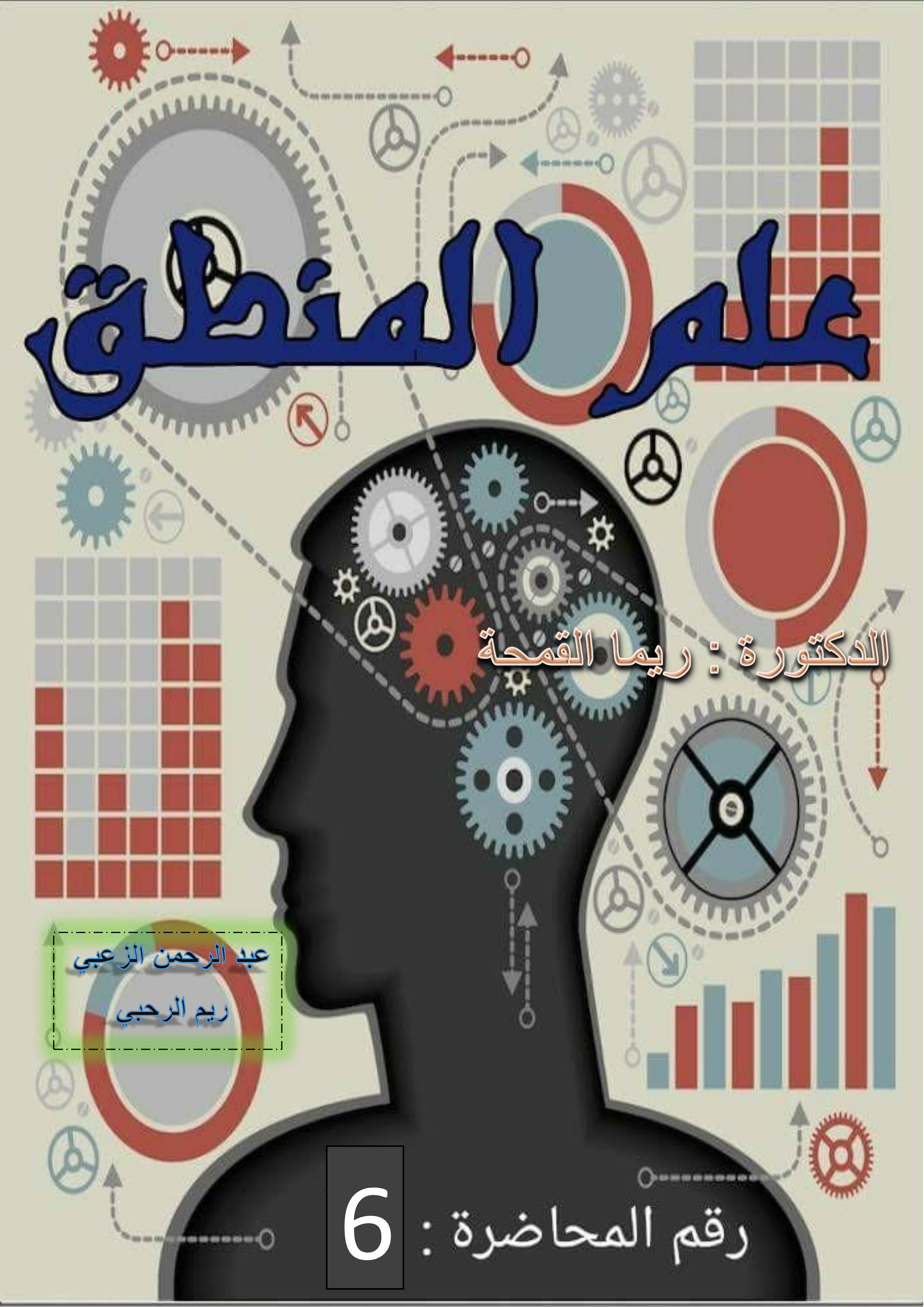


علم المنطق

الدكتورة : ريما القمحة

عبد الرحمن الزعبي
ريم الرحبي

رقم المحاضرة : 6

بسم الله الرحمن الرحيم

قواعد الاستدلال في لغة حساب الإسناديات

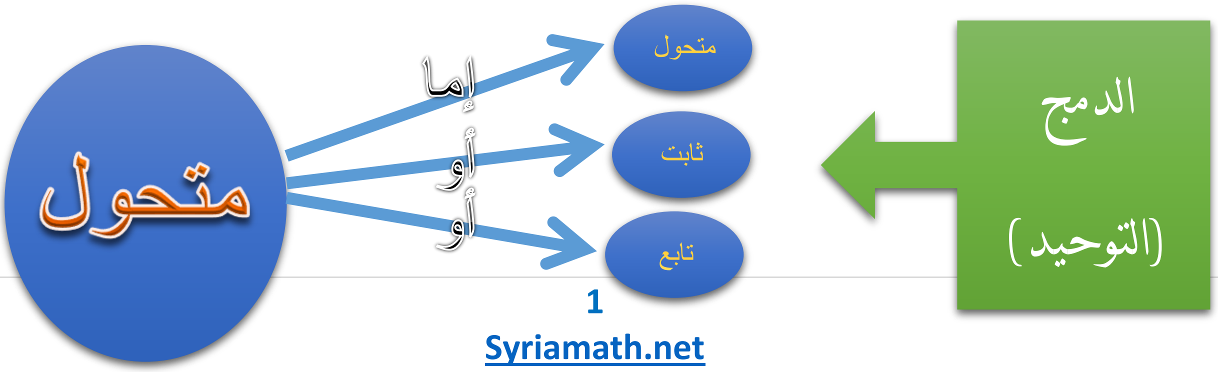
إن قواعد الاستدلال التي استخدمناها في حساب الفرضيات (مودس-يوننس ، العطف ، الفصل ، النفي ، ....) تبقى تلك القواعد صحيحة و يُضاف إليها القواعد التالية :

١ ـ **الاستنساخ العام :** يمكن استنساخ أي صيغة و ذلك باستبدال المتحول بثابت فنحصل على مستنسخ من هذه الصيغة
مثال : لتكن لدينا الصيغة التالية : $\forall x : P(x , f(x), B)$ حيث B ثابت و x متحول
و بالتالي إذا استبدلنا المتحول x بثابت A
و نرمز لذلك بـ : x/A و بالتالي ستكون الإسنادية محققة بعد حذف $\forall x$ أي : $P(A , f(A), B)$ محققة

٢ ـ **التعميم الوجودي :**
إذا كانت الإسنادية محققة من أجل قيمة ثابت فيمكن أن استخدم مكمم الوجود وأبدل الثابت بقيمة المتحول
مثال : إذا كانت الاسنادية محققة :
$\forall x : Q(A, g(x), x)$ حيث أن x متحول A ثابت
فتكون الاسنادية التالية محققة أيضاً حيث y متغير
$\exists y : \forall x \quad Q(y, g(y), x)$

الحل في حساب الإسناديات :

كما في لغة حساب الفرضيات يكون الحل هنا باستخدام تقنية الحل و تقنية نقض الفرض ولكن هناك الفرق التالي : بفرض أن الصيغ موجودة بشكل عطف نظامي ونريد تطبيق تقنية الحل .... فـ علينا أولاً القيام **بتوحيد (دمج)** الصيغ
الدمج (التوحيد) : هو عبارة عن استبدال المتحولات في اسنادية أو صيغة بـ ثابت أو تابع أو متغيرات أخرى حيث يتم هذا الاستبدال في كامل الصيغة



وإذا كان المتحول نفسه في صيغتين مختلفتين فإن الاستبدال يجب أن يتم في كل من الصيغتين علماً أنه في المسائل عادةً ما نعيد تسمية المتحولات في كل صيغة على حدا حتى لا يكون لصيغتين نفس المتحولات ..

الهدف من هذه الاستبدالات هو الحصول على عبارات موحدة لكي نستطيع تطبيق تقنية الحل عليها

مثلاً :

$P(x) \vee Q(x)$ إسنادية أولى

$R(x) \vee D(z)$ إسنادية ثانية

إما نحول المتغير x من الأولى أو الثانية

$P(x) \vee Q(x)$

$R(y) \vee D(z)$

مثال توضيحي :

$\neg P(z) \vee R(y)$ إسنادية أولى

$P(z) \vee Q(x)$ إسنادية ثانية

إما نحول x إلى z أو العكس

بحال x/z أي في الإسنادية الثانية نحصل على $P(z) \vee Q(z)$ و بتطبيق تقنية الحل :

$\neg P(z) \vee R(y)$ $\qquad$ $P(z) \vee Q(z)$

$R(y) \vee Q(z)$

ولو جعلنا z/x في الإسنادية الأولى نحصل على $\neg P(x) \vee R(y)$ و بتطبيق تقنية الحل :

$\neg P(x) \vee R(y)$ $\qquad$ $P(x) \vee Q(x)$

$R(y) \vee Q(x)$

مثال :

$$P(x, f(x)) \vee Q(f(x), y)$$

$$\neg P(A, z) \vee R(h(z))$$

لدينا كل من x, y, z متحولات و A ثابت

نبدل كل x بـ A لأن (كل متحول نبدله بثابت)

$$P(A, f(A)) \vee Q(f(A), y)$$

$$\neg P(A, z) \vee R(h(z))$$

نبدل كل z بـ $f(A)$ لأن (كل متحول نبدله بتابع)

$$P(A, f(A)) \vee Q(f(A), y)$$

$$\neg P(A, f(A)) \vee R(h(f(A)))$$

الآن بتطبيق **تقنية الحل** نحصل على :

$$P(A, f(A)) \vee Q(f(A), y) \qquad \neg P(A, f(A)) \vee R(h(f(A)))$$

$$Q(f(A), y) \vee R(h(f(A)))$$

مثال :

$$\neg K(J, x)$$

$$K(y, mother(y))$$

نبدل كل y بـ J

$$\neg K(J, x)$$

$$K(J, mother(J))$$

$(x/mother(J))$

$$\neg K(J, mother(J))$$

$$K(J, mother(J))$$

بتطبيق تقنية الحل نحصل على $null$

ملاحظة : من بداية القضية يجب أن تكون بمتحولات مختلفة ، لكن باستخدام تقنية الدمج إذا حصلنا على نفس الأسماء في صيغ فإننا لا نعود بتسميتها كل واحدة باسم وإنما نطبق الاستبدال لكامل الصيغ .

في المثال السابق :

$$\neg K(J, x)$$

$$K(y, mother(y))$$

$(x/mother(J))$ هنا مختلفين تصبح :

$$\neg K(J, mother(y))$$

$$K(y, mother(y))$$

حصلنا على نفس الاسم ولكن لا نبدل شيئاً

(y/J) هنا نحول لجميع الصيغ تصبح :

$$\neg K(J, mother(J))$$

$$K(J, mother(J))$$

بتطبيق تقنية الحل نحصل على $null$

مثال :

$\neg K(J, x)$ $\quad$ $K(x, OJ)$

x/J تصبح : $\neg K(J, J)$ $\quad$ $K(x, OJ)$

هنا لا يمكن الدمج في جميع الصيغ ، لدينا ثوابت مختلفة

مثال :

$$K(x, OJ) \qquad \neg K(J, y)$$

x/J و y/OJ (يعني بدل كل x بـ J و كل y بـ OJ)

$$K(J, OJ) \qquad \neg K(J, OJ)$$

بتطبيق تقنية الحل ينتج لدينا $null$

مثال :

$$P(f, A, y) \qquad \neg P(f, z, B)$$

z/A $\quad$ y/B تصبح :

$$\underbrace{P(f, A, B) \qquad \neg P(f, A, B)}_{null}$$

تذكرة :

مكمم الشمول هو $\forall$

مكمم الوجود هو $\exists$

التحويل إلى شكل العطف النظامي :

لتطبيق تقنية الحل يجب ان تكون جميع الصيغ في شكل عطف نظامي .

خطوات الحل			
رقم الخطوة	**الخطوة**	**الشرح**	**مثال**
١	**حذف الاقتضاء**		$\forall x : person(x) \Rightarrow Death(x)$ $\forall x : \neg person(x) \vee Death(x)$
٢	**حذف النفي**	(باستخدام قواعد النفي و قانوني دمورغان)	$\neg(\forall x : person(x) \Rightarrow Death(x))$ $\exists x : \neg(person(x) \Rightarrow Death(x))$ $\exists x : person(x) \wedge Death(x)$

٣	**إعادة تسمية المتحولات**	أي يجب إعادة تسمية المتحولات الواقعة في مجال المكمم بحيث يكون لكل مكمم متغيراته الخاصة	$\forall x : \left[\neg \underbrace{p(x)}_{\text{تابع مكمم الشمول}} \vee \left(\exists x : \overbrace{Q(x)}^{\text{تابع مكمم الوجود}}\right)\right]$ $\forall x : [\neg p(x) \vee (\exists y : Q(y))]$
٤	**حذف المكممات الوجودية إن وجدت**	**نميز حالتين :** إذا وقعت متحول مكمم الوجود في بداية الصيغة أو الجملة فإننا نحذف مكمم الوجود ونستبدل متحوله بثابت غير موجود في الصيغ	$\exists x : p(x) \wedge Q(x) \equiv p(A) \wedge Q(A)$ يجب ألا يكون ضمن نطاق **مكمم آخر** و نستبدل المتحول بثابت
		إذا وقع متحول مكمم الوجود ضمن مجال متحولات الشمول فإننا نحذف مكمم الوجود و نستبدل متحوله بتابع لمتحولات مكممات الشمول التي وضعت في مجالها و هو التابع يجب أن لا يكون موجود في الصيغة	$\forall x\, \exists y : h(x) \wedge height(x, y)$ $y/f(x)$ $\equiv \forall x : h(x) \wedge height(x, f(x))$ ولو كان : $\forall x\, \forall y\, \exists z : h(x) \wedge L(x, y, z)$ $z/f(x, y)$ $\forall x\, \forall y : h(x) \wedge L(x, y, f(x, y))$ مثلاً : $\exists y\, \forall x : h(x) \wedge Hieght(x, y)$ y/A $\forall x : h(x) \wedge Hieght(x, A)$

٥	**وضع مكممات الشمول في المقدمة**	$\forall x : \{\neg p(x) \lor \{\forall y[\neg p(y) \lor p(f(x),y)] \land [Q(x,f(x)) \land \neg p(h(x))]\}\}$ $\forall x\ \forall y: \{\neg p(x) \lor \{[\neg p(y) \lor p(f(x),y)] \land [Q(x,f(y)) \land \neg p(h(x))]\}\}$
٦	**توزيع الـ ∨ على الـ ∧**	من المثال السابق نكمل و نوزع الـ∨ على الـ∧ $\forall x\ \forall y: \{[\neg p(x) \lor \neg p(y) \lor p(f(x),y)] \land [\neg p(x) \lor Q(x,f(y))] \land [\neg p(x) \lor \neg p(h(x))]\}$
٧	**حذف المكممات الشمولية (∀)**	من المثال السابق نقوم بحذف المكممات الشمولية $[\neg p(x) \lor \neg p(y) \lor p(f(x),y)] \land [\neg p(x) \lor Q(x,f(y))] \land [\neg p(x) \lor \neg p(h(x))]$ أصبحت شكل عطف نظامي

ملاحظة : يجب حفظ طريقة التحويل السابقة بالترتيب

ملاحظة متممة : بعد حصولنا على شكل العطف النظامي ومن أجل الحل نقوم بحذف الـ ∧ ويصبح لدينا

$$[\neg p(x) \vee \neg p(y) \vee p(f(x), y)]$$
$$[\neg p(x) \vee Q(x, f(y))]$$
$$[\neg p(x) \vee \neg p(h(x))]$$

ثم نعطي كل صيغة أسماء متحولات مختلفة عن الصيغ الأخرى كما يلي :

$$[\neg p(x) \vee \neg p(y) \vee p(f(x), y)]$$
$$[\neg p(x_1) \vee Q(x_1, f(y_1))]$$
$$[\neg p(x_2) \vee \neg p(h(x_2))]$$

مثال : حول الصيغة التالية إلى شكل عطف نظامي :

$$\forall x \{ [\forall y (Animal(y) \vee Loves(x,y)] \Rightarrow [\exists y : Loves(y,x)] \}$$

١	حذف الاقتضاء	$\forall x \{ \neg[\forall y (Animal(y) \vee Loves(x,y)] \vee [\exists y : Loves(y,x)] \}$
٢	حذف النفي	$\forall x \{ [\exists y (Animal(y) \wedge \neg Loves(x,y)] \vee [\exists y : Loves(y,x)] \}$
٣	إعادة تسمية المتحولات	$\forall x \{ [\exists y (Animal(y) \wedge \neg Loves(x,y)] \vee [\exists z : Loves(z,x)] \}$
٤	حذف المكممات الوجودية $y/f(x) \quad z/g(x)$	$\forall x \{ [(Animal(f(x)) \wedge \neg Loves(x, f(x))] \vee [Loves(g(x), x)] \}$
٥	وضع مكممات الشمول في المقدمة	محققة
٦	توزيع الـ ∨ على الـ∧	$\forall x \{ [Loves(g(x), x) \vee (Animal(f(x))] \wedge [Loves(g(x), x) \vee \neg Loves(x, f(x))] \}$
٧	حذف المكممات الشمولية $(\forall)$	$\{ [Loves(g(x), x) \vee (Animal(f(x))] \wedge [Loves(g(x), x) \vee \neg Loves(x, f(x))] \}$

وهو المطلوب : أصبحت شكل عطف نظامي

تمرين :

لتكن لدينا مجموعة الحقائق عن الفيلة الثلاثة : $Sam\ , Clyde\ , Oscar$

١- لون Sam وردي
٢- لون $Clyde$ رمادي وهو يحب $Oscar$
٣- لون $Oscar$ رمادي أو وردي وهو يحب Sam والمطلوب :
استخدم الحل بالنقض لإثبات أنه يوجد فيل رمادي يحب فيلاً وردياً

لنرمز لما يلي :
تعني أن x لونه وردي
تعني أن x لونه رمادي
$\mathrm{Loves}(x, y)$ تعني أن x يحب y

الحل :

١- لون Sam وردي : $pink(Sam)$ وهي في شكل العطف النظامي
٢- لون $Clyde$ رمادي وهو يحب $Oscar$:
$Gray(Clyde) \wedge\ Loves(Clyde, Oscar)$ وهي في شكل العطف النظامي
٣- لون $Oscar$ رمادي أو وردي وهو يحب Sam

$$[pink(Oscar) \vee\ Gray(Oscar)] \wedge Loves(Oscar, Sam)$$

وهي في شكل العطف النظامي

المطلوب منا :

$$\exists x\ \exists y\ \{Gray(x) \wedge pink(y) \wedge Loves(x, y)\}$$

ولأن الطريقة نقض الغرض : فيجب علينا أن ننفي المطلوب

$$\neg\{\exists x\ \exists y\ \{Gray(x) \wedge pink(y) \wedge Loves(x, y)\}\}$$

$$\forall x\ \forall y\ \{\neg Gray(x) \vee \neg pink(y) \vee \neg Loves(x, y)\}$$

نحولها لصيغة عطف نظامي تصبح :

$$\neg Gray(x) \vee \neg pink(y) \vee \neg Loves(x, y)$$

والآن لنجمع الحقائق جميعها بدءاً بنفي القضية المراد إثباتها كالتالي:

أي القضية صحيحة

انتهت المحاضرة السادسة