الموضوع: المحاضرة الأولى | 2017/3/7

مبدأ الاستقراء الرياضي

مبدأ الترتيب الحسن:

لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$ فإنه يوجد عنصر أصغري في المجموعة A

وليكن a_0 أي يحقق $\forall a \in A \Rightarrow a_0 \leq a$

و العنصر الأصغري هو عنصر وحيد.

الاستقراء الرياضي:

لتكن S_n قضية رياضية ما لإثبات صحة القضية S_n من أجل $n \geq 1$ و $n \in \mathbb{N}$

مبدأ الاستقراء: لإثبات أن S_n صحيحة من أجل $n \geq 1$ نتبع الخطوات التالية: 1

خطوة البداية: نبرهن صحة S_n من أجل $n=1$

خطوة الاستقراء: نفرض صحة S_n من أجل $n=k$ و نبرهن أنها صحيحة من أجل $n=k+1$

مثال: لتكن S_n قضية تحقق: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

لإثبات ذلك:

خطوة البداية: من أجل $n=1$

$$1 = 1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 = 1$$

محققة

خطوة الاستقراء: نفرض $n=k$ القضية صحيحة

أي: $\sum_{i=1}^{k} i^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$ صحيحة ونبرهن صحتها من أجل $n=k+1$

$$S_{k+1}: \sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3$$

$$= \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2\left[\frac{k^2}{4} + k + 1\right]$$

$$S_{k+1}: \sum_{i=1}^{k+1} i^3 = (k+1)^2 \frac{k^2+4k+4}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

و القضية صحيحة من أجل $n=k+1$

و بالتالي هي صحيحة من أجل $n \geq 1$

ملاحظة -1-: لدينا القضية S_n و لنثبت صحتها من أجل $n \geq n_0$

خطوة البداية: لنثبت صحتها من أجل $n=n_0$

خطوة الاستقراء: لنفرض صحتها من أجل $n=k \geq n_0$ ولنثبت صحتها من أجل $n=k+1$

ملاحظة -2- : لدينا القضية S_n ولنثبت ولنثبت صحتها من أجل $n \geq n_0$

خطوة البداية : لنثبت صحة S_n من أجل $n = n_0$

خطوة الاستقراء : نفرض صحة S_n من أجل كل قيمة $n_0 \leq k$

ولنثبت صحة S_n من أجل $n = k+1$

مثال : اثبت صحة القضية S_n التالية :

$a_0 = 1 \ , \ a_1 = 2 \ , \ a_2 = 3$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \qquad \forall n \geq 3$

والمطلوب : إثبات صحة أن $a_n \leq 3^n$

من أجل $n \in \mathbb{N}$

* خطوة البداية : $n = 3$:

$a_3 = a_2 + a_1 + a_0 = 3 + 2 + 1 = 6$

محققة $6 = a_3 \leq 3^3 = 27$

$a_4 = a_3 + a_2 + a_1 = 6 + 3 + 2 = 11$

محققة $a_4 \leq 3^4 = 81$

خطوة الاستقراء : نفرض صحة S_n من أجل كل n محققة : $n \leq k$

$a_k \leq 3^k$

ولنبرهن صحتها من أجل $n = k+1$

$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} + a_{k-2}$

$a_{k+1} \leq 3^k + 3^{k-1} + 3^{k-2} \leq 3^k + 3^k + 3^k = 3^{k+1}$

القضية محققة من أجل $n = k+1$ فهي محققة من أجل $n \in \mathbb{N}$

مثال : إذا كانت S_k صحيحة . "لم نتحقق من صحة S_1 $\Leftarrow$ قد نصل لنتائج خاطئة"

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} i = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k^2 + k + 2}{2}$$

(نفرض أنها صحيحة من أجل $n = k$)

فإن S_n صحيحة من أجل $n = k+1$:
$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)^2 + k + 1 + 2}{2}$$
$$= \frac{k^2 + 3k + 4}{2}$$

لنثبت أنها صحيحة من أجل $n = k+1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = 1 + 2 + \cdots + k + k + 1 = \frac{k^2 + 3k + 4}{2}$$ محققة

لنناقش خطوة البداية :

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$$

هل $\frac{k(k+1)}{2} \overset{?}{=} \frac{k^2+k+2}{2}$ محقق

ماهي قيمة n التي تحقق هذه المساواة

$$\frac{n_0(n_0+1)}{2} = \frac{n_0^2+n_0+2}{2} \Longrightarrow n_0^2+n_0 = n_0^2+n_0+2$$

$0 = 2$ مستحيل .

إذاً لا توجد قيمة n_0 تكون فيها المساواة محققة

إذاً لا يمكن أن نكتفي بخطوة البداية فقط أو خطوة الاستقراء فقط لاثبات أي قضية رياضية

تقوية $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$$+\left(\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n-1+n \\ \sum_{i=1}^{n} i = n+n-1+\cdots+3+2+1\end{array}\right.$$

$$2\sum_{i=1}^{n} i = \underbrace{n+1+\cdots+n+1}_{n \text{ مرة}} = n(n+1)$$

^_^ اثبت بطريقة الاستقراء الرياضي :

$\boxed{3}$ $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ ثم احسب $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}$

خطوة البداية :

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$ محققة ✓

خطوة الاستقراء :

نفرض صحتها من أجل $n=k$

$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}$ ولنبرهن صحتها من أجل $n=k+1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= 1 - \frac{(k+2)-1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{\cancel{(k+1)}}{\cancel{(k+1)}(k+2)} = 1 - \frac{1}{k+2}$$ محققة ✓

وبالتالي القضية محققة من أجل $n=k+1$ بالتالي هي صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

وبالتالي : $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1$

انتهت المحاضرة ^_^

قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

تعريف: ليكن $a,b\in\mathbb{Z}$ و $a\neq 0$ نقول أن a يقسم b ونكتب $a\backslash b$ إذا وجد عدد $c\in\mathbb{Z}$ بحيث يكون $b=a.c$

- b يقبل القسمة على a   - b مضاعف للعدد a

أما إذا كان a لا يقسم b نكتب: $a\nmid b$

خواص قابلية القسمة:

1- العدد 1 يقسم جميع الأعداد الصحيحة والعدد 0 مضاعف لكل الأعداد الصحيحة

2- $a\backslash b \to -a\backslash b$; 3- $\forall k\in\mathbb{Z}: a\backslash b \Rightarrow a\backslash k.b$

4- $\forall a\in\mathbb{Z}: a/a$

5- $a\backslash b \wedge b\backslash c \Rightarrow a\backslash c$

6- $a\backslash b \wedge a\backslash c \to a\backslash(bn+cm) \quad \forall n,m\in\mathbb{Z}$

7- $a\backslash b_i \ (i=1,2,\dots,n) \Rightarrow a\backslash(m_1b_1+m_2b_2+\dots+m_nb_n)$

8- $a\backslash b \vee a\backslash c \Rightarrow a\backslash b.c$ العكس صحيح بس إذا a أولي

لاحظ: $4\backslash 12=6.2 \xLeftarrow{\text{ولكن}} 4\nmid 2 \wedge 4\nmid 6$

9- $a\backslash b \Rightarrow |a|\leq|b|$

10- $a\backslash b \wedge b\backslash a \Leftrightarrow |a|=|b|$

نتيجة: مجموعة القواسم الموجبة للعدد الصحيح $a\neq0$ هي مجموعة منتهية من القواسم التي هي أصغر من $|a|$

مبرهنة إقليدس: إذا كان $a,b\in\mathbb{Z}$ و $a\neq0$ فإنه يوجد عددين q, r وحيدين ويحققان العلاقة $b=aq+r$ حيث $0\leq r<|a|$

البرهان: لتكن لدينا مجموعة الأعداد الصحيحة التالية:

$$S=\{x\geq 0 : x=b-at \ ; t\in\mathbb{Z}\}$$

هي مجموعة مرتبة وغير خالية حسب مبدأ الترتيب الحسن يوجد عنصر أصغري هو r وقيمة t الموافقة له هي q: $0\leq r=b-q.a$

إذاً $b=aq+r$

لنثبت أن $r<|a|$

نفرض $r\geq|a| \Leftarrow r-|a|\geq 0$

إذا كان a موجبة $\Leftarrow$ $r-|a|$

الموضوع : ....

5

تناقض. $r-|a| = r-a = b-qa-a = b-(q+1)a \in S$

إذا كان a سالب $\Leftarrow$ $r-|a| = r+a = b-qa+a = b-(q-1)a \in S$

بما أن $r-|a| \geq 0$ و تنتمي إلى S وهو أصغر من r هذا تناقض إذاً $r<|a|$

لنثبت أن q و r وحيدين نفرض أنه يوجد r_1, q_1 بحيث يكون

$$\left.\begin{array}{l} b = aq_1+r_1 \\ b = aq+r \end{array}\right\} aq+r = aq_1+r_1 \Rightarrow a(q_1-q) = r-r_1$$

أي $r-r_1$ مضاعف a و لكن $r<|a|$ وهذا يتحقق إذا كان $r-r_1=0$

أي $r=r_1$ كذلك نستنتج $q=q_1$

تمرين: اثبت أن مربع أي عدد فردي يزيد بواحد على مضاعفات العدد 8

b عدد صحيح فردي $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ $b^2 = 8M+1$

b عدد فردي $\Leftarrow$ $b=2n+1$ $\longleftarrow$ $b^2 = 4n^2+4n+1 \Leftarrow b^2 = 4n(n+1)+1$

$n(n+1)$ جداء عددين متتاليين هو عدد زوجي "$2M$".

$\Rightarrow b^2 = 8M+1$

مثال: اثبت أن $6 \setminus f(m) = 5m^3+7m$ حيث $m \in \mathbb{N}$،

نستخدم الاستقراء الرياضي.

خطوة البداية: $m=0$ ؛ $6 \setminus f(0) = 0$ محققة

كذلك: $6 \setminus f(1) = 5+7 = 12$ محققة

خطوة الاستقراء: نفرض أن $6 \setminus f(k)$ ولنبرهن أن $6 \setminus f(k+1)$

$6 \setminus f(x) = 5k^3+7k$

$f(k+1) = 5(k+1)^3+7(k+1) = 5k^3+7k+15k^2+15k+5+7$

$= f(k)+15(k+1)k+12 = f(k)+30M+12$

حيث $2M = k(k+1)$.

إذاً كل حد في العلاقة السابقة يقبل القسمة على 6 بالتالي $6 \setminus f(k+1)$ أي أن:

$6 \setminus f(m) \ \forall m \in \mathbb{N}$

مثال ٢ اثبت أن $14 \setminus f(n) = 5^{2n+1}+3^{4n+2}$ من أجل $n \geq 0$.

خطوة البداية: $n=0$ $\Longleftarrow$ $14 \setminus f(0) = 5+9 = 14$

إذاً $14 \setminus f(1)$. $14 \setminus f(1) = 125+729 = 854 = 14 \times 61$

خطوة الاستقراء: نفرض أن $14 \backslash f(k) = 5^{2k+1} + 3^{4k+2}$

ولنبرهن صحتها من أجل $n = k+1$ أي $f(k+1)$:

$$f(k+1) = 5^{2(k+1)+1} + 3^{4(k+1)+2}$$
$$= 5^2 \cdot 5^{2k+1} + 3^{4k+2} \cdot 3^4$$
$$f(k+1) = 5^2(5^{2k+1} + 3^{4k+2}) - 5^2 \cdot 3^{4k+2} + 3^{4k+2} \cdot 3^4$$
$$= 5^2 \cdot f(k) - 3^{4k+2}(-5^2 + 3^4)$$
$$= 5^2 f(k) - 3^{4k+2} \cdot 56 \qquad : 56 = 14 \times 4$$
$$= 5^2 f(k) - 14 \times 4 \times 3^{4k+2}$$

بما أن $14 \backslash 14 \times 3 \times 3^{4k+2}$ و $14 \backslash 5^2 f(k)$ إذاً $14 \backslash f(k+1)$ ومنه $14 \backslash f(n)$, $n \geq 1$

القاسم المشترك الأعظم

تعريف: نقول عن d_1 إنه قاسم مشترك للعددين a,b غير صفريين معاً إذا كان $d_1 \backslash a \wedge d_1 \backslash b$

- كذلك يكون $-d_1 \backslash a \wedge -d_1 \backslash b$ أي $-d_1$ قاسم مشترك
- يكون $|d_1| \leq |a|$ و $|d_1| \leq |b|$ والقاسم المشترك $[d_1]$ لا يمكن أن يتجاوز العدد الأصغر بينهما
- مجموعة القواسم الموجبة للعددين a,b غير الصفريين معاً هي تقاطع مجموعة قواسم العدد a مع مجموعة قواسم العدد b وهي مجموعة منتهية

القاسم المشترك الأعظم GCD, gcd : Greatest common Divisor

القاسم المشترك الأعظم للعددين a,b غير المعدومين معاً هو $d = (a,b)$ أو $d = gcd(a,b)$ يحقق ما يلي:

1. $d > 0$
2. $d \backslash a \wedge d \backslash b$
3. إذا كان العدد الصحيح c حيث $c \backslash a \wedge c \backslash b$ فإن $c \leq d$

مثال: $\{(-a,-b) = (a,-b) = (-a,b) = d\}$

$d = (0,8) = 8$

$d = (-2,15) = 1$

$d = (-3,15) = 3$

نتيجة: القاسم المشترك الأعظم لعددين غير معدومين موجود ووحيد

مبرهنة: ليكن لدينا العددين الصحيحين a,b غير المعدومين فإن القاسم المشترك الأعظم لهما يكتب كتركيب خطي للعددين $a,b\in\mathbb{Z}$ * إذا $a,b\in\mathbb{Z}$ و $d=(a,b)$ فإنه يوجد عددين صحيحين x_0, y_0 بحيث يكون $d=ax_0+by_0$

الاثبات: نأخذ مجموعة التراكيب الخطية للعددين a,b.

$S=\{n=ax+by \ ; x,y\in\mathbb{Z}\}$

لأنه: من أجل $x=\mp 1$ و $y=0$ $\leftarrow$ $n=\mp a\in S$

و $x=0$ ، $y=\mp 1$ $\leftarrow$ $n=\mp b\in S$

نعرف مجموعة $S_1=\{n>0 ; n\in S\}$

$S_1\neq\emptyset$ و تحتوي على عنصر أصغري وليكن n_0.

أي $n_0=ax_0+by_0$ حيث $x_0, y_0\in\mathbb{Z}$

حسب مبرهنة إقليدس $n=n_0q+r$ حيث $0\leq r<n_0$

$ax+by=q(ax_0+by_0)+r$

ولدينا $0\leq r$: $r=a(x-qx_0)+b(y-y_0)$

إذا كان $r=0$ نجد أن $n_0\backslash n$

أو $r>0$ أي $r\in S_1$ وهو أصغر من n_0 وهذا يناقض كون n_0 عدد أصغري في S_1

أي أن $n_0\backslash n$ أي أن n_0 تقسم جميع عناصر المجموعة S أي $n_0\backslash a$ و $n_0\backslash b$

أي أن $n_0\backslash d(a,b)$ $\Leftarrow$ $\boxed{n_0\leq d}$

ومن جهة أخرى $d\backslash a \wedge d\backslash b$ أي $\boxed{d\backslash n_0}$

$\Leftarrow d=n_0=ax_0+by_0$

نتيجة: تمثيل القاسم المشترك الأعظمي للعددين a,b ليس وحيداً

مثال: $d(15,24)=3$

$3=(-3)15+(2)24=(5)15+(-3)24$

تعريف: a,b عددين أوليين نسبياً $\Leftarrow d(a,b)=1$

مبرهنة: يكون العددين الصحيحين a ، b غير المعدومين أوليين نسبياً فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان x,y بحيث يكون $ax+by=1$

الاثبات: $\Leftarrow$ $(a,b)=1=d$ نجد من المبرهنة السابقة $1=ax+by : x,y\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ بالعكس: إذا كان $ax+by=1$ نفرض $d=(a,b)$ $\Leftarrow d\backslash a, d\backslash b$

أي $d\backslash 1$ $\Leftarrow$ $d=1$

نتيجة: إذا كان $d=(a,b)$ ، $a=a_0 d$ ، $b=b_0 d$ فإن $(a_0,b_0)=1$

الإثبات: $d>0$ ، $ax+by=d$

$\left(\frac{a}{d}\right)x+\left(\frac{b}{d}\right)y=1 \xrightarrow{\text{أي أن}} \left(\frac{a}{d}=a_0 , \frac{b}{d}=b_0\right)=1$

خواص

1- $d=(|a|,|b|)=(a,b)=(-a,b)=(a,-b)$

2- $(a,0)=|a| \wedge (1,a)=1$

3- $(a,m)=1 \wedge (b,m)=1 \Longrightarrow (a.b,m)=1$

4- $k\backslash a.b ,\ (k,b)=1 \Longrightarrow k\backslash a$

إذا كان $k\backslash a.b$ فقد تكون k لا تقسم أياً منهما a ، b

$4\backslash 12=2.6 \xrightarrow{\text{ولكن}} 4\nmid 2 , 4\nmid 6$

5- إذا كان $(a,b)=1$ و $a\backslash n$ ، $b\backslash n \Longrightarrow a.b\backslash n$

إذا لم يكن a ، b أوليان فيما بينهما فهذا ليس بالضرورة صحيح مثال: $4\backslash 12$ ، $6\backslash 12$ ولكن $24\nmid 12$

6- إذا كان $d=(a,b)$ فإن $D=(ma,mb)=md$

انتهت المحاضرة ^_^

الموضوع: المحاضرة الثالثة

٢٠١٧/٣/٢٨

مبرهنة: إذا كان $b = aq + r$; $0 \leq r < a$ و $a, b > 0$ فإن

$d(a,b) = (a, r)$

الإثبات: $d = (a,b)$, $d \backslash a$, $d \backslash b$ أي $d \backslash b - aq \Leftarrow d \backslash r$

أي $d \backslash a$ و $d \backslash r$ $\Leftarrow$ d قاسم مشترك لـ a, r نفرض $c \backslash a$ ، $c \backslash r$

$\Leftarrow c \backslash aq + r \Leftarrow c \backslash b$ وجدنا $c \backslash b$ و $c \backslash a$ $\Leftarrow c \leq d$ أي $c \backslash d$

ومنه: $d = (a, r)$

خوارزمية إقليدس: تساعدنا في إيجاد القاسم المشترك الأعظم لـ a, b حيث $b > a > 0$

$b = aq_1 + r_1$, $0 \leq r_1 < a$

1- إذا كان $r_1 = 0 \Leftarrow a$ يقسم $b \Leftarrow d(a,b) = a$

2- إذا كان $0 < r_1$

$a = r_1 q_2 + r_2$, $0 \leq r_2 < r_1$

1- إذا كان $r_2 = 0 \Leftarrow r_1 \backslash a \Leftarrow d = (a,b) = (a, r_1) = r_1$

2- $0 < r_2$

$r_1 = r_2 q_3 + r_3$; $0 \leq r_3 < r_2$

نتابع حتى الخطوة t ...

$r_t = r_{t+1} q_{t+2} + r_{t+2}$

$0 \leq r_{t+2} < r_{t+1}$

$\boxed{1}$ إذا كان $r_{t+2} = 0 \Leftarrow r_{t+1} \backslash r_t$

فالقاسم المشترك الأعظم $d = (a,b) = (a, r_1) = (r_1, r_2) = \dots = (r_t, r_{t+1}) = r_{t+1}$

يمكننا الرجوع بالعلاقات مثل:

$r_{t+2} = r_t - r_{t+1} q_{t+2}$

نتابع حتى نصل إلى الصيغة $d = ax_0 + by_0$

فنحصل على قيم x_0 و y_0

مثال: اوجد القاسم المشترك الأعظم للعددين $d = (12378, 3054)$

$12378 = 4 \cdot 3054 + 162$

$3054 = 18 \cdot 162 + 138$

$162 = 1 \cdot 138 + 24$

$138 = 5.24 + 18$.

$24 = 1.18 + 6$.

$18 = 3.6 + 0 \Rightarrow d = 6$

أوجد حل للمعادلة. $d = 12378x + 3054y$

$6 = 24 - 1.18 = 24 - 1(138 - 5.24)$

$= -1.(138) + 6.24 = -1.(138) + 6(162 - 1.138)$

$= 6.162 - 7.138 = 6.162 - 7(3054 - 18.162)$

$= (-7)(3054) + 132(12378 - 4.3054)$

$= 132(12378) - 535(3054)$

نجد أن $x = 132$ و $y = -535$

القاسم المشترك الأعظم لعدة أعداد

تعريف: لتكن a_i اعداد صحيحة $i = 1, 2, \dots, n$ نقول عن $d = (a_1, \dots, a_n)$

أنه القاسم المشترك الأعظم لـ a_i : $i = 1, 2, \dots, n$

إذا تحقق مايلي:

1- $d > 0$

2- $d \backslash a_i \quad i = 1, 2, \dots, n$

3- إذا كان $c \backslash a_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ فإن $c \leq d$

مبرهنة: إذا كان $\left\{\begin{array}{l} d = \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ d_1 = \gcd(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, (a_{n-1}, a_n)) \end{array}\right. \Rightarrow d = d_1$

مثال: $d = \gcd(256, (112, 72)) = \gcd(256, 8) = 8$

تعريف: نقول عن الاعداد a_i إنها أولية نسبياً فيما بينها $i = 1, 2, \dots, n$

إذا كان: $d = \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$

ونقول أن الاعداد الأولية a_i أولية نسبياً مثنى مثنى إذا كان:

$\gcd(a_i, a_j) = 1$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$

نتيجة: إذا كانت الأعداد a_i أولية نسبياً مثنى مثنى فإنها أولية نسبياً فيما بينها

$\Rightarrow$ العكس غير صحيح بالضرورة مثال:

إن $d = \gcd(24, 15, 7) = 1$ 24,15,7 أولية نسبياً فيما بينها لكن ليست

أولية مثنى مثنى. لكن $(24, 15, 40) = 1$ $(24, 15) = 3$, $(24, 40) = 8$, $(15, 40) = 5$

المضاعف المشترك الأصغر lcm

تعريف: لتكن a_i أعداد صحيحة $i=1,2,\dots,n$ غير صفرية إذا $a_i \backslash m$ فإن m مضاعف للأعداد a_i ؛ $i=1,2,\dots,n$ ونقول $L=lcm(a_1,\dots,a_n)$ هو مضاعف مشترك الأصغر لهذه الأعداد إذا حقق ما يلي:

1- $L>0$ 2- $a_i \backslash L$; $i=1,2,\dots,n$

3- إذا كان $a_i \backslash m$ فإن $L \leq m$; $i=1,2,\dots,n$

★ المضاعف المشترك الأصغر للأعداد صحيحة يقسم أي مضاعف مشترك لهذه الأعداد $L \backslash m$.

مبرهنة: إذا كان a و b عددان صحيحان موجبان و $d=(a,b)$ و $L=\frac{a.b}{d}$ فإن: $L=lcm$.

البرهان: بما أن $d=(a,b) \Leftarrow \left.\begin{matrix} a=a_0d \\ b=b_0d \end{matrix}\right\}$: $(a_0,b_0)=1$

$$L=\frac{a.b}{d}=a_0b=ab_0$$

لتكن m مضاعف مشترك لـ a , b

$m=a_1.a=a_1.a_0d \Leftarrow b\backslash m \Leftarrow b_0d \backslash a_1a_0d \Leftarrow b_0\backslash a_1a_0$

بما أن $(a_0,b_0)=1 \Leftarrow b_0\backslash a_1 \Leftarrow \underbrace{ab_0}_{L} \backslash \underbrace{a.a_1}_{m}$

$L\backslash m \longrightarrow L=lcm(a,b)$

مثال: احسب $L=lcm(21,6)=\frac{21.6}{3}=42$

تمارين: استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات:

$48^2=2304 \backslash f(n)=7^{2n+2}-48n-49$ $n\geq 0$

خطوة البداية: $f(0)=7^2-49=0 \longrightarrow 2304 \backslash f(0)$

$f(1)=7^4-48-49=7^2(7^2-1)-48=7^2.48-48=(7^2-1)48$
$=48^2 \Rightarrow 48^2 \backslash f(1)$

خطوة الاستقراء: نفرض $48^2 \backslash f(k)=7^{2k+2}-48k-49$

لنبرهن أن $48^2 \backslash f(k+1)$

$f(k+1)=7^{2k+4}-48(k+1)-49$
$=7^{2k+2}.7^2-48k-48-49.$

$=7^2(7^{2k+2}-48k-49)+7^2(48)k+7^2(49)-48k-48-49$

$=7^2f(k)+48k(7^2-1)+7^2(49)-48-49$

$=7^2f(k)+48^2k \quad +f(1)$

بما أن كل من يقبل القسمة على 48^2 أي أن $48^2 \backslash f(k+1)$ والعلاقة صحيحة من أجل

② اثبت أنه إذا كان $3x+2$ مضاعفاً لـ 7 فإن $49 \backslash 42x^2+4x+41=f(x)$

$3x+2=7k$

$24x^2+4x+41=(3x+2)(8x-4)+49$

$=(3x+2)[5(3x+2)-7(x+2)]+49$

$=5(3x+2)^2-7(3x+2)(x+2)+49$

$=5(49k^2)-(49k)(x+2)+49$ كل منها يقبل القسمة على 49

اثبت أن : إذا كان $14 \backslash 15x^2-11x+14$ $\quad 3x+2=7k$

$f(x)=15x^2-11x+14=(3x+2)(5x+7)-2(14)$

نميز حالتين : $\boxed{1}$ إذا كان العدد x فردياً

$5x-7$ عدد زوجي يقبل القسمة على 2 } $\Leftarrow$ $f(x)$ يقبل القسمة على 14

$3x+2$ عدد فردي يقبل القسمة على 7 }

$\boxed{2}$ إذا كان العدد x زوجي :

$5x-7$ فردي } $\Leftarrow$ $14 \backslash f(x)$

$3x+2$ عدد زوجي يقبل القسمة على 2 و 7 $\Leftarrow$ $(3x+2)$ يقبل القسمة على 14

$\boxed{3}$ إذا كان $(a,b)=1$ أوجد $d=(a+b,a-b)$

$(a,b)=1 \Longleftrightarrow ax+by=1$

$d=(a+b,a-b) \Longleftrightarrow d=(a+b)x+(a-b)y$

$=\underbrace{ax+b(-y)}_{=1}+\underbrace{bx+ay}_{=1}=1+1=2$

أو

$d=a\underbrace{(x+y)}+b\underbrace{(x-y)}$

$\underbrace{aX+bY}_{=1}=1$

إذاً يوجد حالات يكون فيها $d=1$

وحالات يكون فيها $d=2$

الأعداد الأولية.

عدد أولي p: هو عدد يقبل القسمة على الواحد وعلى نفسه فقط، $1 < p$

عدد مؤلف n: هو عدد يمكن كتابته على شكل $n = a.b$; $1<a<n$, $1<b<n$

خواص

1- الأعداد الأولية p_i هي أعداد أولية نسبياً مثنى مثنى.

2- $p \backslash n \Rightarrow \gcd(p,n)=p$.

3- $p \backslash a.b$ فإن p يقسم أحدهما على الأقل.

4- $p \backslash a_1.a_2 \dots a_n$ فإن p يقسم أحدها على الأقل

5- $p \backslash p_1.p_2 \dots p_n$ فإن p يساوي أحد هذه الأعداد

مبرهنة أساسية في الحساب: إذا كان $1<n$ فإن n عدد أولي أو n يكتب كجداء لأعداد أولية وهذا التمثيل وحيد

الإثبات: نستخدم الاستقراء الرياضي: 2 أولي، 3 أولي، $4=2.2$، 5 أولي

خطوة الاستقراء: نفرض أن k يكتب كجداء لأعداد أولية (عوامله الأولية) وكل عدد $\le k$ يحقق المبرهنة

ونأخذ العدد $k+1$ إذا كان $k+1$ أولي حصلنا على المطلوب

أما إذا كان $k+1$ غير أولي فإن $k+1=a.b$ حيث $1<a<k+1$, $1<b<k+1$

نجد أن $a<k+1$ يكتب كجداء لعوامله الأولية

و $b<k+1$ يكتب كجداء لعوامله الأولية

وبالتالي $k+1$ هو جداء عوامل أولية وبالتالي أياً كان n فإنه عدد أولي أو جداء لأعداد أولية لنفرض أن n يكتب بشكل غير وحيد أي:

$$n = p_1.p_2 \dots p_t = q_1.q_2 \dots q_s$$

$p_1 \backslash q_1.q_2 \dots q_s$ إذاً p_1 يساوي أحد الأعداد الأولية q_1 وليكن $p_1=q_1$

$\Leftarrow a=p_2.p_3 \dots p_t = q_2 q_3 \dots q_s$ و $a<n$ (لذا تم البرهان كذلك بالاستقراء)

$p_2 \backslash q_2 q_3 \dots q_s$ فهو يساوي أحد الأعداد الأولية وليكن $p_2=q_2$

نتابع ... حتى نجد أن $t=s$

بالتالي يكتب n بشكل وحيد على شكل جداء عوامله الأولية.

* إن للعدد n عوامل متكررة فنكتبه بالشكل القانوني $n=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$

: $p_1<p_2<\dots<p_r$ و $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$

مثل $360=2^3.3^2.5$

نتيجة (1): إذا كان $n>1$ فله عامل أولي P بحيث $P\backslash n$

نتيجة (2): إذا كان $n>1$ فله عامل أولي P و $P\leq\sqrt{n}$

الإثبات: n عدد مؤلف: $n=a.b$; $\left.\begin{array}{l}1<a<n\\1<b<n\end{array}\right\} \Longrightarrow 1<a\leq b<n$

$n=a.b\geq a^2 \Longrightarrow a\leq\sqrt{n}$

$1<a \longleftarrow$ له عدد أولي P و $P\backslash a \Longrightarrow P\leq a\leq\sqrt{n}$

نتيجة (3): إذا كان $n>1$ وليس له عامل أولي P بحيث $P\leq\sqrt{n}$

فإن n أولي.

مبرهنة: عدد الأعداد الأولية غير منته

الإثبات: نفرض أن عدد الأعداد الأولية منته وعددهم n

$P_1, P_2, \dots, P_n$: بحيث $P_1<P_2<\dots<P_n$

نأخذ العدد $N=P_1.P_2\dots P_n+1$ ($N>1$) فله عامل أولي P

$P\backslash N$ وهو أحد الأعداد الأولية $P_1,\dots,P_n \Longrightarrow P\backslash P_1.P_2\dots P_n$

أي أن $P\backslash N-P_1.P_2\dots P_n \Longrightarrow P\backslash 1 \Longrightarrow P=1$

وهذا تناقض إذاً عدد الأعداد الأولية غير منته

صيغ تعطي أعداداً أولية "وربما غير أولية أيضاً"

هذه الصيغة تعطي أعداداً أولية $N=P_1.P_2\dots P_n+1$

① $N=2+1=3$ أولي ③ $N=2.3.5+1=31$ أولي

② $N=2.3+1=7$ أولي ④ $N=2.3.5.7+1=211$ أولي

⑤ $N=2.3.5.7.11+1=2311$ أولي

⑥ $N=2.3.5.7.11.13+1=30031=59\times509$ غير أولي

إذاً لا توجد صيغة تعطي أعداداً أولية فقط

بعض الصيغ التي تعطي أعداداً أولية وغير أولية

$= x^2-x+41 \qquad 0\leq x\leq 40$

$= x^2-79x+1601 \qquad 0\leq x\leq 79$

$= (a,b)=1 \Longrightarrow ax+b$ تعطي أعداداً أولية

$= F_n=2^{2^n}+1$: F_1, F_2, F_3, F_4 أعداد أولية (ولكن F_5 عدد مؤلف)

انتهت المحاضرة ^^