فريق: سبرامات

المحاضرة العاشرة ☺ | ١٠/٤/٢٠١٧م

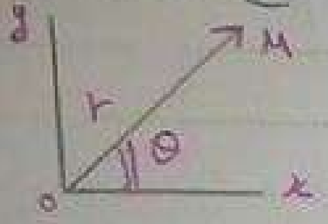
1

٣- تحليل المتجهات ومبادئ الهندسة التفاضلية ؟

- مشتق شعاع الموضع في الاحداثيات ← القطبية ، الاسطوانية ، الكروية

١) في الاحداثيات القطبية :

ليكن Δ محور ، O في مركز الاحداثيات ومبدأ الشعاع $\vec{OM}$ و $\vec{I}$ شعاع الواحدة على Δ



حيث r طول $\vec{OM}$ ، $\measuredangle(\vec{OX}, \Delta) = \theta$

عندئذ $M(r, \theta)$

$$\vec{OM} = r\vec{I} \quad \text{--- (1)}$$

- اذا فرضنا $\vec{i}$ و $\vec{j}$ اشعة واحدة على ox و oy عندئذ :

$$\vec{I} = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$$

لكن $\theta = \theta(t)$

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = (-\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{J} = \vec{i}\cos(\theta + \frac{\pi}{2})\ \vec{j}(\sin\theta + \frac{\pi}{2})$$

(حيث $\vec{J}$ ينتج عن $\vec{I}$ بدوران عكس عقارب الساعة بزاوية $\frac{\pi}{2}$)

$$\vec{J} = \vec{i}(-\sin\theta) + \vec{j}(\cos\theta)$$

$$\vec{J} = -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta$$

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{J}$$

$$\vec{I}' = \theta' \vec{J}$$

$$\vec{OM} = r\vec{I}$$

$$\vec{OM}' = r'\vec{I} + r\vec{I}'$$

شعاع السرعة $\vec{OM}' = r'\vec{I} + r\theta'\vec{J}$

يأتي السؤال من هذه الفقرة إما نظري (استنتج شعاع السرعة والتسارع في الاحداثيات القطبية) أو عملي (أوجد شعاع السرعة والتسارع و... وطويلة كل منهما حيث الطويلة $= \sqrt{(r')^2 + (r\theta)^2}$

$$\vec{OM}'' = r''\vec{I} + r'\vec{I}' + (r\theta'\vec{J})'$$

ولكن : $\vec{J}' = (-\vec{i}\cos\theta - \vec{j}\sin\theta)\theta'$

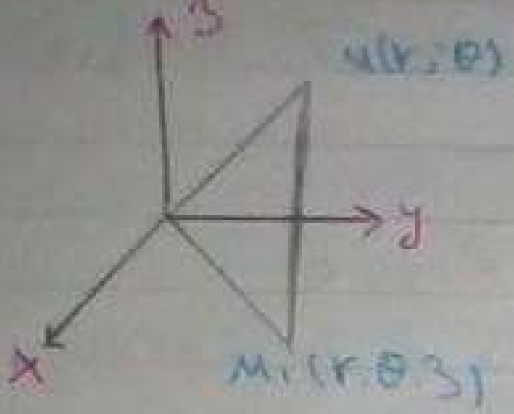
$$\vec{J}' = -\theta\vec{I}$$

$$\vec{OM}'' = r''\vec{I} + r'\theta'\vec{J} + r'\theta'\vec{J} + r\theta''\vec{J} - r\theta'^2\vec{I}$$

شعاع التسارع $\vec{OM}'' = (r'' - r\theta'^2)\vec{I} + (2r'\theta' + r\theta'')\vec{J}$

ملاحظة :

في أبحاث الميكانيك يمثل مشتق شعاع الموضع لنقطة شعاع السرعة و المشتق الثاني يمثل شعاع التسارع .



في الاحداثيات الاسطوانية

لتكن M' مسقط M على oxy

الاحداثيات القطبية $M(r, \theta)$

$$\vec{OM} = \vec{OM_1} + \vec{M_1M}$$

بالاسقاط

$$\vec{OM} = r\vec{I} + z\vec{k}$$

بالاشتقاق

$$\vec{OM'} = (r'\vec{I} + r\theta'\vec{J} + z'\vec{k})$$

وبنفس الطريقة

$$\vec{OM''} = (r'' - r\theta'^2)\vec{I} + (2r'\theta + r\theta'')\vec{J} + z''\vec{k}$$

مثال: الاسئلة الدورة بكر هام

1) اوجد طويلة كل من شعاع السرعة والتسارع للمنحني

$$C: \begin{cases} x = e^t \\ y = 2\cos(3t) \\ z = 2\sin(3t) \end{cases}$$

2) نفرض $M(r, \theta)$ نقطة مادية تتحرك على منحني معين في مستوٍ معادلته $r = ae^\theta$ وفق القانون الزمني $\theta = wt$ اوجد بدلالة θ كل من شعاعي السرعة والتسارع.

الحل:

(2)

$$\vec{OM'} = r'\vec{I} + r'\theta\vec{J}$$

$$r = ae^\theta$$

$$\Rightarrow r' = a\theta' e^\theta$$

$$\theta = wt \Rightarrow \theta' = w$$

$$r' = awe^\theta \Rightarrow \vec{OM'} = (awe^{wt})\vec{I}$$

$$+ (awe^\theta)\theta\vec{J}$$

$$|\vec{OM'}| = \sqrt{(awe^\theta)^2 + (awe^\theta\theta)^2}$$

Scanned by CamScanner

$$\vec{OM} = e^{-t}\vec{i} + \cos(3t)\vec{j} + 2\sin(3t)\vec{k} \quad (1)$$

$$\vec{OM'} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

$$x' = -e^{t}$$

$$z' = 6\cos(3t) \qquad y' = -\frac{2}{3}\sin(3t)$$

$$\vec{OM'} = -e^{-t}\vec{i} - 6\sin(3t)\vec{j} + 6\cos(3t)\vec{k}$$

$$|\vec{OM'}| = \sqrt{(-e^{-t})^2 + (-6\sin(3t))^2 + (6\cos(3t))^2}$$

$$\vec{OM''} = x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}$$

وظيفة :- $\begin{cases} x'' = e^{-t} \\ y'' = \\ z'' = \end{cases}$

المنحنيات في $\mathbb{R}^3$

ليكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ تابع شعاعي مركباته

$x = x(T)$

$y = y(T)$

$z = z(T)$

• نسمي الخط الذي ترسمه النقطة M عندما تتحرك T على $[a,b]$ بالمنحني C، الذي بدايته $f(a)$ ونهايته $f(b)$ حيث المعادلات الوصفية للمنحني

$$C : \begin{cases} x = x(T) \\ y = y(T) \\ z = z(T) \end{cases}$$

• نقول عن المنحني C انه منحني مغلق اذا كان $F(a) = f(b)$

• نقول عن $r_0 \in R^3$ انها نقطة مضاعفة لمنحني C اذا وجد T_1 و T_2 من $[a.b]$ و $T_1 \neq T_2$ بحيث

$$f(T_1) = f(T_2) = r_0$$

• نقول عن C منحني بسيط ⟸ C لا يحوي نقاط مضاعفة

• نقول عن $T_0 \in [a.b]$ انها قيمة شاذة اذا كان $f'(T_0) = \vec{0}$
وغير ذلك T_0 قيمة نظامية

• نقول عن C منحني املس ⟸ C لا يحوي نقاط شاذة

اي $\forall\ T_0 \in [a.b]\ f'(T_0) \neq \vec{0}$

$$f : [0, \pi] \to R^2$$

مثال

وظيفة $C : \begin{cases} x = a\cos 2T \\ y = a\sin 2T \end{cases}$

ملاحظة
نعوض قيمة T بأي رقم
مهم ان يكون ضمن المجال

♥ المنحني الموجه:
لتكن oxyz جملة محاور احداثية و C منحني و N نقطة منه
نقول عن المنحني C انه موجه اذا كانت النقطة A التي نعتبرها مبدأ القياس بالقوس $\overset{\frown}{AM}$
نختار عليها جهة نعتبرها الجهة الموجبة لا يهمنا كيف اختيار المرجع ١١٨
• عندئذ اي نقطة على المنحني M تتعين بالقوس $\overset{\frown}{AM}$ نسمي الطول
$S = \overset{\frown}{AM}$ وهو الطول من M الى A لا يكون S سالب اذا كانت M تتحرك
• نسمي S الوسيط الطبيعي للنقطة M ويكون

$$\vec{OM}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$$

ثلاثية فرينيه $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$

المتجهة الواحدة المماس للمنحني

نفرض المنحني C معين بالمعادلة

$C: \vec{OM} = \vec{OM}(s)$ حيث s الوسيط الطبيعي

عندئذ نعرف $\vec{T} = \dfrac{d\vec{OM}}{ds}$ بأنه المتجهة المحمول على المماس

للمنحني C عند النقطة M طوله يساوي الواحد.

وجهته من جهة توجيه المنحني

ومركباته $\vec{T} = (\alpha, \beta, \gamma)$ حيث

$$\alpha = \frac{dx}{ds} \quad , \quad \beta = \frac{dy}{ds} \quad , \quad \gamma = \frac{dz}{ds}$$

حيث

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

ولكن

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

كون طول $\vec{T}$ هو الواحد.

أي

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

عندئذ

$$S = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

وهو طول القوس.

مثال:

$F[0,1] \to R^3$

$x = \cos T$

$\vec{T}$ اوجد $\quad y = \sin T$

S اوجد $\quad z = \frac{1}{2\pi} T$

$$\vec{OM} = \cos T\,\vec{i} + \sin T\,\vec{j} + \frac{1}{2\pi} T\,\vec{k}$$

نوجد ds

$x' = -\sin t, \quad y' = \cos t, \quad z' = \frac{1}{2\pi}$

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$$

$$ds = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2}$$

$$S = \int \sqrt{\quad} \cdot dt$$

$\vec{T} \begin{cases} \end{cases} \alpha = \frac{-\sin t}{ds} \quad \beta = \frac{\cos t}{ds} \quad \gamma = \frac{\frac{1}{2\pi}}{ds}$

اعداد: جيهان حطط
فريق: سيريانات