$\hat{h}_X(v.u) = \hat{h}_X(u) . \hat{h}_X(v)$

المحاضرة الرابعة .   28/3/2017

مونومورفيزم $\Leftarrow$ تشاكل مودولات متباين .

مبرهنة : لتكن $_R\mathcal{L}$ فئة المودولات اليسارية فوق الحلقة الواحدية R . وليكن $u : A \to B$
مونومورفيزم للفئة $_R\mathcal{L}$ (تشاكل مودولات) عندئذٍ العبارات التالية متكافئة :

1) u إبيمورفيزم .

2) u غامر .

البرهان : $(1) \Leftarrow (2)$: لنفرض أن u إبيمورفيزم ولنفرض جدلاً أن u ليس غامر

$Im(u) = u(A) \subsetneq B$

$B_1 = B \times \{0\} \cong B$

$B_2 = \{0\} \times B \cong B$

$\pi_i : B \longrightarrow B_i \quad i = 1,2$

$C = B_1 \oplus B_2$

$\tau_i : B_i \longrightarrow C \quad i = 1,2$

$v_i = \tau_i . \pi_i : B \longrightarrow C \quad i = 1,2$

6

$\forall x \in u(A)$

$v_1(x) = \tau_1 \pi_1(x) = \pi_1(x) = (x, 0)$

$v_2(x) = \tau_2 \pi_2(x) = \pi_2(x) = (0, x)$

$\forall x \in u(A), \quad v_1(x) - v_2(x) = (x, 0) - (0, x) = (x, -x)$

$K = \langle v_1(x) - v_2(x) \quad \forall x \in u(A) \rangle$

إن K مودول جزئي في C لنأخذ مودول الخارج $D = \frac{C}{K}$.

$u(A) \subsetneq B$

$\exists x \in B , \ x \notin u(A)$

$v_1(x) - v_2(x) \notin K$

$v_1(x) + k \neq v_2(x) + k$

لنفرض أن $w : C \longrightarrow \frac{C}{K}$ التشاكل التقاربي الغامر

$w(v_1(x)) \neq w(v_2(x))$

$(\omega v_1)(x) \neq \omega v_2(x)$

$\boxed{\omega v_1 \neq \omega v_2}$

7

$\forall y \in u(A)$, $y = u(x)$; $x \in A$

$v_1(u(x)) - v_2(u(x)) \in K$

$v_1(u(x)) + K = v_2(u(x)) + K$

$\omega(v_1 u(x)) = \omega(v_2 u(x))$

$(\omega v_1) u(x) = (\omega v_2) u(x)$

$(\omega v_1) u = (\omega v_2) u$

$u : A \longrightarrow B$

لتكن u غامر لـ إيبيمورفيزم فإن التطبيق متباين

$\beta : \mathcal{L}(B,X) \longrightarrow \mathcal{L}(A,X)$

$\beta(g) = g.u$

$\forall X \in ob({}_R\mathcal{L})$

لأجل $X = D$ نجد أن :

$\omega v_1 , \omega v_2 \in \mathcal{L}(B,D)$

$\beta(\omega v_1) = (\omega v_1).u$

$= (\omega v_2).u = \beta(\omega v_2)$

$\boxed{\omega v_1 = \omega v_2}$

وهذا غير ممكن . ومنه u غامر .

$(2) \Leftarrow (1)$ لنفرض أن u غامر ولنبرهن على أن u إيبيمورفيزم . لنبرهن على أن التطبيق

$\beta : \mathcal{L}(B,X) \longrightarrow \mathcal{L}(A,X)$

متباين

$\beta(g) = g.u \quad \forall X \in ob({}_R\mathcal{L})$

لتكن $v_1, v_2 \in \mathcal{L}(B,X)$ حيث $v_1 \neq v_2$

$v_i : B \longrightarrow X$

ومنه يوجد $x \in B$ حيث $v_1(x) \neq v_2(x)$

وبالتالي يوجد $y \in A$ حيث $x = u(y)$.

$v_1 u(y) \neq v_2 u(y)$

$v_1 u \neq v_2 u$

$\beta(v_1) \neq \beta(v_2) \Rightarrow$

ومنه β متباين

تعريف: لتكن $\mathcal{L}$ فئة ولتكن $u: A \to B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$
نقول أن u إيزومورفيزم (أو تقابل مورفيزم) إذا وجد $v: B \to A$ بحيث:
$v.u = I_A$ و $u.v = I_B$

نتيجة: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $u: A \to B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$ إذا كان u إيزومورفيزم و $v: B \to A$ مورفيزم بحيث $v.u = I_A$ ، $u.v = I_B$
فإن v إيزومورفيزم وحيد

الإثبات: واضح أن v إيزومورفيزم.
ليكن $w: B \to A$ مورفيزم آخر للفئة $\mathcal{L}$ بحيث $w.u = I_A$ و $u.w = I_B$
عندئذ: $w = w.I_B = w.(u.v) = (w.u).v = I_A . v = v$

نتيجة: لتكن $\mathcal{L}$ فئة عندئذ لأجل كل $A \in ob(\mathcal{L})$ فإن I_A إيزومورفيزم
لدينا: $I_A . I_A = I_A$

الأشياء الجزئية:

تعريف: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $A \in ob(\mathcal{L})$ لنأخذ الصف M_A المؤلف من جميع المونومورفيزمات $v: V \to A$ حيث $V \in ob(\mathcal{L})$
إن M_A ليس خالي لأن $I_A \in M_A$
لنعرف على الصف M_A علاقة "$\le$" بالشكل:
أياً كان $u, v \in M_A$ نقول:
$$v \le u \Leftrightarrow \exists v_1 \in \mathcal{L}(V, U) \quad v = u v_1$$
إن v_1 مونومورفيزم لأن v مونومورفيزم

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "u"] & A \\ V \arrow[u, "v_1"] \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

نتيجة التمهيدية السابقة

تمهيدية: ليكن $\mathcal{L}$ فئة و $A \in ob(\mathcal{L})$ ولنفرض أن $u, v \in M_A$

الشروط الآتية متكافئة: 1) $v \leq u$

2) يوجد مورفيزم وحيد $v_1 \in \mathcal{L}(V,U)$ يحقق $v = u.v_1$

البرهان: (2) ⇐ (1) حسب التعريف.

(1) ⇐ (2) لنفرض أن $v \leq u$ عندئذٍ يوجد $v_1 \in \mathcal{L}(V,U)$ بحيث $u.v_1 = v$

ليكن $v_2 \in \mathcal{L}(V,U)$ بحيث $u.v_2 = v$

لدينا u مونومورفيزم وبالتالي التطبيق: $\alpha : \mathcal{L}(X,U) \longrightarrow \mathcal{L}(X,A)$

المعرف بالشكل: $\alpha(f) = u.f$ متباين

لأجل $X = V$ نجد أن $v_1, v_2 \in \mathcal{L}(V,U)$

$$\alpha(v_1) = u.v_1 = v = u.v_2 = \alpha(v_2)$$

$\Rightarrow \boxed{v_1 = v_2}$ ⇐ يوجد مورفيزم وحيد

العلاقة التي عرفناها على M_A هي انعكاسية ومتعدية

تمهيدية: ليكن $\mathcal{L}$ فئة و $A \in ob(\mathcal{L})$ لنأخذ الصف M_A فإن العلاقة $\leq$ المعرفة على M_A انعكاسية ومتعدية.

البرهان: ليكن $v \in M_A$ المطلوب إثبات أن $v \leq v$ (v مونومورفيزم)

لدينا $I_V \in \mathcal{L}(V,V)$ ويحقق $v.I_V = v$ ومنه $v \leq v$ أي أن $\leq$ انعكاسية.

ليكن $u, v, w \in M_A$ بحيث: $v \leq u$ ، $u \leq w$

$v \leq u \;,\; \exists\, v_1 \in \mathcal{L}(V,U) : v = u.v_1$

$u \leq w \;,\; \exists\, w_1 \in \mathcal{L}(V,W) : u = w.w_1$

$w_1.v_1 : V \longrightarrow W$ لدينا $\exists \in \mathcal{L}(V,W)$

ويحقق: $w.(w_1.v_1) = (w.w_1).v_1 = u.v_1 = v$

وهذا يعني أن $v \leq w$ وبالتالي العلاقة $\leq$ متعدية.

Mon 3/4 /2019

المحاضرة الثامنة

مبرهنة: لتكن الفئة ولتأخذ الصف M_A حيث $A\in ob(\mathcal{L})$ ولتكن $u:U\to A,\ v:V\to A \in M_A$

الشروط الآتية متكافئة:

1) $v\le u\ ,\ u\le v$

2) توجد ايزومورفيزم وحيدة $v_1\in\mathcal{L}(V,U)\ ,\ u_1\in\mathcal{L}(U,V)$

تحقق: $v.u_1=u$ $\qquad u.v_1=v$

البرهان: (2) ⇐ (1) واضح حسب التعريف

(1) ⇐ (2) لنفرض أن $v\le u\ ,\ u\le v$

حسب التعريف سابقاً يوجد مورفيزم وحيد $v_1\in\mathcal{L}(V,U)\ ,\ u.v_1=v$

وأيضاً يوجد مورفيزم وحيد $u_1\in\mathcal{L}(U,V)$ حيث $v.u_1=u$

لدينا $v_1:V\to U$

$u_1:U\to V$

ونشكل: $v_1.u_1: U\to U$

$u_1.v_1: V\to V$

بما أن $u:U\to A$ مونومورفيزم فإن التطبيق $\alpha:\mathcal{L}(X,U)\to\mathcal{L}(X,A)$

متباين $\alpha(f)=u.f$

أياً كان $X\in ob(\mathcal{L})$ لأجل $X=U$ نجد أن $v_1.u_1\in\mathcal{L}(U,U)$

$$\alpha(v_1.u_1)=u.(v_1.u_1)=(u.v_1).u_1=v.u_1=u$$
$$=u.I_U=\alpha(I_U)$$

10

وبما أن α متباين فإن $\boxed{v_1.u_1=I_U}$

أيضاً لما كان $v:V\to A$ مونومورفيزم فإن التطبيق:

$\alpha':\mathcal{L}(X,V)\to\mathcal{L}(X,A)$

متباين $\alpha'(g)=v.g$

أياً كان $X\in ob(\mathcal{L})$ لأجل $X=V$ نجد أن $u_1.v_1\in\mathcal{L}(V,V)$

ومنه:
$$\alpha'(u_1.v_1)=v.(u_1.v_1)=(v.u_1).v_1=u.v_1=v$$
$$=v.I_V=\alpha'(I_V)$$

وبما أن v متباين نجد أن $\boxed{u_1 . v_1 = I_V}$
وهذا يبين أن كلاً من u_1 , v_1 (إيزومورفيزم)

مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}$ فئة ولنأخذ الصف M_A حيث $A \in ob(\mathcal{L})$
العلاقة ρ المعرفة على الصف M_A بالشكل الآتي:

$$v \rho u \Leftrightarrow v \leq u \ , \ u \leq v \qquad \forall v, u \in M_A$$

البرهان: لما كانت العلاقة $\leq$ انعكاسية فإنه:

$$\forall v \in M_A , \ v \leq v$$
$$v \rho v$$

أي أن ρ انعكاسية. وأيضاً تناظرية

لتكن $v, u, w \in M_A$ حيث $v \rho u \ , \ u \rho w$

$$v \leq u \ , \ u \leq v$$
$$u \leq w \ , \ w \leq u$$

ولما كانت العلاقة $\leq$ متعدية نجد أن
$$v \leq w$$
$$w \leq v$$

وحسب تعريف ρ نجد أن $v \rho w$.
وهذا يبين أن العلاقة ρ هي علاقة تكافؤ.

$v \in M_A$
$\bar{v} = \{u \in M_A : u \rho v\}$
$(V, v) \subset A$ ... $V \to A$
$\boxed{V \subset A}$

تعريف: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $A \in ob(\mathcal{L})$ لنفرض أن $v : V \to A \in M_A$
وأن $\bar{v}$ صف التكافؤ المولد بالعنصر v
نسمي الثنائية $(V, \bar{v})$ مثنياً جزئياً في A، ونعبر عنه اختصاراً $V \subset A$

(c) ...

11

المورفيزم الدالي:

تعريف: لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ فئتين و $F, G: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ دوال مباشرة

نقول أنه يوجد لدينا مورفيزم دالي $f: F \to G$ إذا كان لأجل كل $A \in ob(\mathcal{L})$

فإن $f(A): F(A) \to G(A)$ مورفيزم الفئة $\mathcal{L}_2$

ولأجل كل مورفيزم $u: A \to B$ للفئة $\mathcal{L}_1$ المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "f(A)"] \arrow[d, "F(u)"'] & G(A) \arrow[d, "G(u)"] \\ F(B) \arrow[r, "f(B)"] & G(B) \end{tikzcd}$$

$$G(u)\, f(A) = f(B) . F(u)$$

ملاحظة: إذا كانت الدوال F, G غير مباشرة يصبح المخطط الشكل:

12

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "f(A)"] & G(A) \\ F(B) \arrow[r, "f(B)"] \arrow[u, "F(u)"] & G(B) \arrow[u, "G(u)"'] \end{tikzcd}$$

$$G(u) . f(B) = f(A) . F(u)$$

ونقول عن المورفيزم الدالي f أنه إيزومورفيزم دالي إذا كان لأجل كل $A \in ob(\mathcal{L})$ فإن $f(A): F(A) \to G(A)$ إيزومورفيزم للفئة $\mathcal{L}_2$.

مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ فئتين و $F, G: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ دوال مباشرة. لنفرض أيضاً $f, g: F \to G$ مورفيزمات دالية عندئذ فإن $f.g: F \to G$ مورفيزم دالي.

مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $u: X \to X'$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$ عندئذ:

1- يوجد مورفيزم دالي $f: h_{X'} \to h_X$

2- يوجد مورفيزم دالي $g: h_X \to h_{X'}$

البرهان: 1) ومما سابقاً لأجل $X, X' \in ob(\mathcal{L})$ يوجد دوال مباشرة

$$h_X, h_{X'}: \mathcal{L} \to Set's$$

لنعرف $f: h_{X'} \longrightarrow h_X$ بحيث يكون مورفيزم دالي.

ليكن $A \in ob(\mathcal{L})$ ولنعرف $f(A): h_{X'}(A) \longrightarrow h_X(A)$

$$: \mathcal{L}(X',A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,A)$$

$\forall u \in \mathcal{L}(X',A)$

نضع: $\boxed{f(A)(u) = u.w}$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "u"] & A \\ X \arrow[u, "w"] \arrow[ur, "u.w"'] & \end{tikzcd}$$

$$u = v \Rightarrow u.w = v.w$$

وبالتالي: $f(A)(u) = f(A)(v)$

وهذا يبين أن $f(A)$ مورفيزم للفئة $set's$.

ليكن $u: A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$ ولنأخذ المخطط

$$\begin{tikzcd} h_{X'}(A) \arrow[r, "f(A)"] \arrow[d, "h_{X'}(u)"'] & h_X(A) \arrow[d, "h_X(u)"] \\ h_{X'}(B) \arrow[r, "f(B)"] & h_X(B) \end{tikzcd}$$

$$h_X(u).f(A): h_{X'}(A) \longrightarrow h_X(B)$$

$$: \mathcal{L}(X',A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,B)$$

$$\forall w_0 \in \mathcal{L}(X',A) \;;\; \left(h_X(u).f(A)\right)(w_0) = h_X(u)\left(f(A)(w_0)\right)$$

$$= h_X(u)(w_0.w) = u.(w_0.w)$$

من جهة أخرى لدينا: $f(B).h_{X'}(u): h_{X'}(A) \longrightarrow h_X(B)$

$$: \mathcal{L}(X',A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,B)$$

$$\left(f(B).h_{X'}(u)\right)(w_0) = f(B)\left(h_{X'}(u)(w_0)\right)$$

$$= f(B)(u.w_0)$$

$$= (u.w_0).w = u.(w_0.w)$$

ومنه نجد أن: $h_X(u).f(A)(w_0) = f(B).h_{X'}(u)(w_0)$

$$h_X(u).f(A) = f(B).h_{X'}$$

ومنه نرى أن f مورفيزم دالي.

/ /

المحاضرة السادسة

مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $X \longrightarrow X'$: w مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$ عندئذٍ:

1 - يوجد مورفيزم دالي $f: h_{X'} \longrightarrow h_X$

2 - يوجد مورفيزم دالي $g: \hat{h}_X \longrightarrow \hat{h}_{X'}$

البرهان: بما أن $X, X' \in ob(\mathcal{L})$ توجد دوال غير مباشرة

$\hat{h}_X, \hat{h}_{X'} : \mathcal{L} \longrightarrow set's$

لنعرف $g: \hat{h}_X \longrightarrow \hat{h}_{X'}$ بالشكل الآتي: أياً كان $A \in ob(\mathcal{L})$ لنضع

$$g(A) : \hat{h}_X(A) \longrightarrow \hat{h}_{X'}(A)$$

$$: \mathcal{L}(A, X) \longrightarrow \mathcal{L}(A, X')$$

$\forall u \in \mathcal{L}(A, X) \qquad g(A)(u) = w.u$

وهنا نبين أن $g(A)$ مورفيزم للفئة $set's$.

$X \xrightarrow{w} X'$, $A \xrightarrow{u} X$

لتكن $v : A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$. لنبرهن على أن المخطط الآتي:

$$\begin{tikzcd}
\hat{h}_X(A) \arrow[r, "g(A)"] & \hat{h}_{X'}(A) \\
\hat{h}_X(B) \arrow[u, "\hat{h}_X(v)"] \arrow[r, "g(B)"'] & \hat{h}_{X'}(B) \arrow[u, "\hat{h}_{X'}(v)"']
\end{tikzcd}$$

14

تبديلي. ليكن:

$$\lambda \in \hat{h}_X(B) = \mathcal{L}(B, X)$$

$$\hat{h}_{X'}(v).g(B)(\lambda) = \hat{h}_{X'}(v)\big(g(B)(\lambda)\big) = \hat{h}_{X'}(v)\,(w.\lambda) = (w.\lambda).v$$

$$g(A).\hat{h}_X(v)(\lambda) = g(A)\big(\hat{h}_X(v)(\lambda)\big) = g(A)(\lambda.v) = w.(\lambda.v)$$

$X \xrightarrow{w} X'$, $B \xrightarrow{\lambda} X$

مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ فئتين و $F: \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ دالي مباشر. عندئذٍ

فإن: $I_F : F \longrightarrow F$ مورفيزم دالي نسميه

المورفيزم الدالي المطابق.

البرهان: أياً كان $A \in ob(\mathcal{L}_1)$ لنضع

$I_F(A) : F(A) \longrightarrow F(A)$

$I_F(A) = I_{F(A)}$

والذي يمثل مورفيزم في الفئة $\mathcal{L}_2$

ليكن $v : A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_1$. لنبرهن على أن المخطط التالي:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "I_F(A)"] \arrow[d, "F(v)"'] & F(A) \arrow[d, "F(v)"] \\ F(B) \arrow[r, "I_F(B)"] & F(B) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(v)"] & F(B) \\ F(A) \arrow[u, "I_F(A)"] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(v)"] \arrow[dr] & F(B) \arrow[d, "I_{F(B)}"] \\ & F(B) \end{tikzcd}$$

$$F(v).I_F(A) = F(v).I_{F(A)}$$
$$= F(v)$$

$$I_F(B).F(v) = I_{F(B)}.F(v) = F(v)$$

مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ فئات.

$F, G, H: \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ و ~~$G: \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_3$~~ دوال مباشرة. ولنفرض أيضاً أن

$f: F \longrightarrow G$, $g: G \longrightarrow H$ مورفيزمات دالية. عندئذٍ:

$g.f: F \longrightarrow H$ مورفيزم دالي.

البرهان: أياً كان $A \in Ob(\mathcal{L}_1)$ فإن

$f(A): F(A) \longrightarrow G(A)$

$g(A): G(A) \longrightarrow H(A)$

مورفيزمات للفئة $\mathcal{L}_2$

لنعرف $g.f(A): F(A) \longrightarrow H(A)$ بالشكل

$g.f(A) = g(A).f(A)$

والذي يمثل مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_2$.

لتكن $v: A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_1$. ولنبرهن على أن المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "g.f(A)"] \arrow[d, "F(v)"'] & H(A) \arrow[d, "H(v)"] \\ F(B) \arrow[r, "g.f(B)"] & H(B) \end{tikzcd}$$

$$H(v).(g.f)(A) = H(v).(g(A).f(A))$$
$$= (H(v).g(A)).f(A) \; (*)$$

لما كان g مورفيزم دالي فإن المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{tikzcd} G(A) \arrow[r, "g(A)"] \arrow[d, "G(v)"'] & H(A) \arrow[d, "H(v)"] \\ G(B) \arrow[r, "g(B)"] & H(B) \end{tikzcd}$$

$$H(v).g(A) = g(B).G(v)$$

15

Alamal

$$H(v).(g.f)(A) = (g(B).G(v)).f(A)$$
$$= g(B).(G(v).f(A))$$

أخيراً لما كان f مورفيزم دالي فإن المخطط التالي تبديلي:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ {\scriptstyle F(v)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(v)} \\ F(B) & \xrightarrow{f(B)} & G(B) \end{array}$$

$G(v).f(A) = f(B).F(v)$ تبديلي (A)

$$H(v).(g.f)(A) = g(B).(f(B).F(v))$$
$$= (g(B).f(B)).F(v)$$
$$= (g.f)(B).F(v) \Rightarrow$$ المخطط (g.f) تبديلي

مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ فئتين و $F, G: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ دالتان مباشرتان.

لنفرض أن $f: F \to G$ إيزومورفيزم دالي. عندئذٍ يوجد مورفيزم دالي $g: G \to F$ محقق: $g.f = I_F$ ، $f.g = I_G$

البرهان: لنفرض أن $f: F \to G$ إيزومورفيزم دالي.

عندئذٍ حسب التعريف أياً كان $A \in ob(\mathcal{L}_1)$ فإن:

$f(A): F(A) \to G(A)$ إيزومورفيزم للفئة $\mathcal{L}_2$. عندئذٍ يوجد مورفيزم $g(A): G(A) \to F(A)$ محقق:

$f(A).g(A) = I_{G(A)}$

$g(A).f(A) = I_{F(A)}$

لكن $v: A \to B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_1$، لنأخذ المخطط:

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \xrightarrow{g(A)} & F(A) \\ {\scriptstyle G(v)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(v)} \\ G(B) & \xrightarrow{g(B)} & F(B) \end{array}$$

$$F(v).g(A) = I_{F(B)}.F(v).g(A) = (g(B).f(B)).F(v).g(A)$$
$$= g(B).(f(B).F(v)).g(A)$$

ولما كان f مورفيزم دالي فإن:

$$f(B).F(v) = G(v).f(A)$$

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ {\scriptstyle F(v)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(v)} \\ F(B) & \xrightarrow{f(B)} & G(B) \end{array}$$

$$F(\nu) \cdot g(A) = g(B)\left(G(\nu) \cdot f(A)\right) \cdot g(A)$$
$$= g(B) \cdot G(\nu) \cdot \left(f(A) \cdot g(A)\right)$$
$$= g(B) \cdot G(\nu) \cdot I_{G(A)}$$
$$= g(B) \cdot G(\nu) \Rightarrow$$

$f(A) : F(B) \to G(A)$

$g(A) : G(B) \to F(A)$

ومنه نجد أن g مورفيزم دالي.

هذا الأخير الذي [illegible] [illegible] الدوال [illegible]

تمرين بوطالعة: أثبت أن عملية الضرب المعرفة على المورفيزمات الدالية تجميعية.