

$$\hat{h}_X(x, u) = \hat{h}_X(u) - \hat{h}_X(x)$$

28/3/2017

المجموعة الرابعة

موجودتين \Leftrightarrow تماثل مودولات متباينتين

نريد لتكملة R فئة المودولات اليسارية فوق الحلقة العنصرية R وليكن $u: A \rightarrow B$ مورفزم للفئة R (تماثل مودولات) عندئذٍ المقادير التالية متباينة:
 (1) u ليس مورفزم.
 (2) u قائم.

الحل: (1) \subseteq (2): لنفرض أن u ليس مورفزم ولنفرض جدياً أن u ليس قائم.

$$\text{Im}(u) = u(A) \not\subseteq B$$

$$B_1 = B \times \{0\} \cong B$$

$$B_2 = \{0\} \times B \cong B$$

$$\pi_i: B \rightarrow B_i \quad i=1,2$$

$$C = B_1 \oplus B_2$$

$$\tau_i: B_i \rightarrow C \quad i=1,2$$

$$v_i = \tau_i \circ \pi_i: B \rightarrow C \quad i=1,2$$

$$\forall x \in u(A)$$

$$v_1(x) = \tau_1 \pi_1(x) = \pi_1(x) = (x, 0)$$

$$v_2(x) = \tau_2 \pi_2(x) = \pi_2(x) = (0, x)$$

$$\forall x \in u(A), \quad v_1(x) - v_2(x) = (x, 0) - (0, x) = (x, -x)$$

$$K = \langle v_1(x) - v_2(x) \mid \forall x \in u(A) \rangle$$

لأن K مودول جزئي في C لناخذ مودول الكسور $D = \frac{C}{K}$

$u(A) \not\subseteq B$

نجد $x \in B, x \notin u(A)$

$$\exists x \in B, x \notin u(A)$$

$$v_1(x) - v_2(x) \notin K$$

$$v_1(x) + k \neq v_2(x) + k$$

$$\omega: C \rightarrow \frac{C}{K}$$

$$\omega(v_1(x)) \neq \omega(v_2(x))$$

لنفرض أن

$$(\omega v_1)(x) + \omega v_2(x)$$

$$\omega v_1 \neq \omega v_2$$

$$\forall y \in u(A), y = u(x), x \in A$$

$$v_1(u(x)) = v_2(u(x)) \in K$$

$$v_1(u(x)) + k = v_2(u(x)) + k$$

$$\omega(v_1 u(x)) = \omega(v_2 u(x))$$

$$(\omega v_1) u(x) = (\omega v_2) u(x)$$

$$(\omega v_1) u = (\omega v_2) u$$

$$u: A \rightarrow B$$

$$\beta: \mathcal{L}(B, X) \rightarrow \mathcal{L}(A, X)$$

$$\beta(g) = g \cdot u$$

$$\forall X \in \text{ob}(\mathcal{L})$$

$$\omega v_1, \omega v_2 \in \mathcal{L}(B, D)$$

$$\beta(\omega v_1) = (\omega v_1) \cdot u$$

$$= (\omega v_2) \cdot u = \beta(\omega v_2)$$

$$\omega v_1 = \omega v_2$$

لأن u ليس مورفزم فإنه التطبيق
متباين

لأن $X = D$ عند أن

هذا يتناقض مع ذلك لأننا عرفنا β ، فنتصور في (A, X)
وهذا غير ممكن، ومنه u عامر

(2) \Leftarrow (1) لتفرض أن u عامر وانتهى على أن u ليس مورفزم، انتهى على أن التطبيق

$$\beta: \mathcal{L}(B, X) \rightarrow \mathcal{L}(A, X)$$

$$\beta(g) = g \cdot u \quad \forall X \in \text{ob}(\mathcal{L})$$

$$v_1 \neq v_2 \quad \text{حيث } v_1, v_2 \in \mathcal{L}(B, X)$$

$$v_i: B \rightarrow X$$

$$\text{وهو يعبر } v_1(x) \neq v_2(x) \text{ حيث } x \in B$$

$$\text{وبالتالي يوجد } y \in A \text{ حيث } x = u(y)$$

$$v_1 u(y) \neq v_2 u(y)$$

$$v_1 u \neq v_2 u$$

$$\beta(v_1) \neq \beta(v_2) \Rightarrow$$

وهو β متباين

تعريف: لنفرض V و W فضاءات متجهية على F .
 لنفرض $u: V \rightarrow W$ و $v: W \rightarrow V$ تحويلين خطيين.

نقول ان u و v **متوافقان** (inverses) اذا تحقق:

$$v \circ u = I_V \text{ و } u \circ v = I_W$$

نلاحظ ان u و v **متوافقان** اذا وفقط اذا كان u و v **متوافقين** (inverses).

$$v \circ u = I_V \text{ و } u \circ v = I_W$$

الاشارة: واضح ان u و v **متوافقان** اذا وفقط اذا كان u و v **متوافقين**.

لو ان $u: V \rightarrow W$ و $v: W \rightarrow V$ تحويلين خطيين.

$$v \circ u = I_V \text{ و } u \circ v = I_W \iff (u \circ v) \circ u = u \circ (v \circ u) = I_W \circ u = u = u \circ I_V = u \circ (v \circ u) = (u \circ v) \circ u = I_W \circ u = u$$

تعريف: لنفرض V و W فضاءات متجهية على F .
 لنفرض $u: V \rightarrow W$ و $v: W \rightarrow V$ تحويلين خطيين.

$$v \circ u = I_V \text{ و } u \circ v = I_W$$

نقول ان u و v **متوافقان**.

الاشارة والملاحظة:

تعريف: لنفرض V و W فضاءات متجهية على F .
 لنفرض $u: V \rightarrow W$ و $v: W \rightarrow V$ تحويلين خطيين.

الملاحظة: u و v **متوافقان** اذا وفقط اذا كان u و v **متوافقين**.

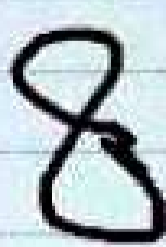
ان M_A و M_B **متوافقان** اذا وفقط اذا كان M_A و M_B **متوافقين**.

نعرف ان M_A و M_B **متوافقان** اذا وفقط اذا كان M_A و M_B **متوافقين**.

ان M_A و M_B **متوافقان** اذا وفقط اذا كان M_A و M_B **متوافقين**.

$$v \leq u \iff \exists v_1 \in L(v, u) \text{ و } v = u \circ v_1$$

ان v_1 و v_2 **متوافقان** اذا وفقط اذا كان v_1 و v_2 **متوافقين**.



$u, v \in M_A$ $A \in \text{ob}(\mathcal{L})$ وليتصور أن
 الشرط الآتية تكافؤ (1) $v \leq u$
 (2) يوجد مورفزم وحيد $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ يحققه $v = u \cdot \varphi$
 البرهان: (1) \Leftrightarrow (2) حسب التعريف

(1) \Rightarrow (2) لنفرض أن $v \leq u$ عندها يوجد $\varphi_1 \in \mathcal{L}(V, U)$ بحيث $u \cdot \varphi_1 = v$
 ليكن $\varphi_2 \in \mathcal{L}(V, U)$ بحيث $u \cdot \varphi_2 = v$

لدينا u مورفزم $u: \mathcal{L}(X, U) \rightarrow \mathcal{L}(X, A)$ وبالتالي التطبيق
 المعرف بالشكل: $\alpha(f) = u \cdot f$ متماثل

الخليل $X = V$ لدينا $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(V, U)$
 $\alpha(\varphi_1) = u \cdot \varphi_1 = v = u \cdot \varphi_2 = \alpha(\varphi_2)$
 $\Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$

تعريف: ليكن \mathcal{L} فئة و $A \in \text{ob}(\mathcal{L})$ نأخذ الصف M_A إن العلاقة \leq المعرفة
 على M_A انعكاسية ومتعدية

البرهان: ليكن $v \in M_A$ اطرب انبات أنه $v \leq v$ (بالتطبيق)
 لدينا $I_v \in \mathcal{L}(V, V)$ يحققه $v \cdot v = v$ ومنه $v \leq v$ أي أن \leq
 انعكاسية.

ليكن $u, v, w \in M_A$ بحيث: $v \leq u$ و $u \leq w$
 $v = u \cdot \varphi_1$, $\exists \varphi_1 \in \mathcal{L}(V, U)$, $v \leq u$
 $u = w \cdot \varphi_2$, $\exists \varphi_2 \in \mathcal{L}(U, W)$, $u \leq w$
 $\varphi_2 \cdot \varphi_1 : V \rightarrow W$ لدينا $\exists \varphi \in \mathcal{L}(V, W)$
 $w \cdot (\varphi_2 \cdot \varphi_1) = (w \cdot \varphi_2) \cdot \varphi_1 = u \cdot \varphi_1 = v$ يحققه

وهذا يعني أن $v \leq w$ وبالتالي العلاقة \leq متعدية.

9

$$u: U \rightarrow A, v: V \rightarrow A \in M_A$$

اشارة الثانية

نريد ان نثبت ان M_A هي $ob(L)$ وليكن $u, v \in M_A$

$$(1) u \leq v, v \leq u$$

(2) توجد ايزومورفزم وحدة

$$u_1 \in L(V, U), v_1 \in L(U, V)$$

$$u \cdot v_1 = v, v \cdot u_1 = u$$

المفاتيح: $(1) \Leftrightarrow (2)$ واضح حسب التعريف

$$(1) \Leftrightarrow (2) \text{ لموضات } v \leq u, u \leq v$$

سبب انه يوجد سائقة v مورفزم وحدة وايضاً يوجد مورفزم وحدة u ايضاً $u_1 \in L(U, V)$ فيكون $v \cdot u_1 = u$

$$v_1: V \rightarrow U$$

$$u_1: U \rightarrow V$$

$$v_1, u_1: U \rightarrow U$$

$$u_1, v_1: V \rightarrow V$$

ومفاتيح:

بأن $u: U \rightarrow A$ مورفزم فإذ التطبيق $\alpha: L(X, U) \rightarrow L(X, A)$

$$\alpha(f) = u \cdot f$$

أما كان $X \in ob(L)$ لأجل $X = U$ وذلك $v_1, u_1 \in L(U, U)$

$$\alpha(v_1, u_1) = u \cdot (v_1, u_1) = (u \cdot v_1), u_1 = v \cdot u_1 = u$$

$$= u \cdot I_U = \alpha(I_U)$$

ولما كان α متباين فإذ أن

$$v_1, u_1 = I_U$$

أيضاً لما كان $v: V \rightarrow A$ مورفزم فإذ التطبيق:

$$\alpha': L(X, V) \rightarrow L(X, A)$$

$$\alpha'(g) = v \cdot g$$

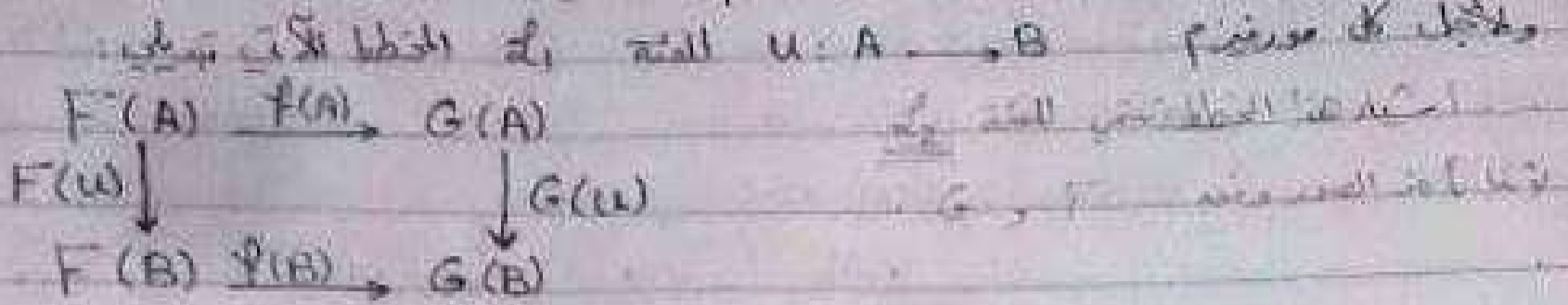
أما كان $X \in ob(L)$ لأجل $X = V$ فإذ أن $u_1, v_1 \in L(V, V)$

$$\alpha'(u_1, v_1) = v \cdot (u_1, v_1) = (v \cdot u_1), v_1 = u \cdot v_1 = v$$

$$= v \cdot I_V = \alpha'(I_V)$$

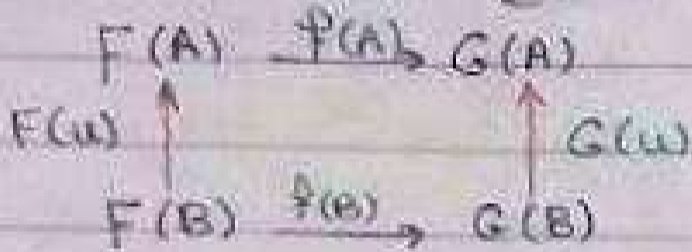
المورفزم الدالي:

تعريف: لنكن D_1, D_2 فئتين و $F, G: D_1 \rightarrow D_2$ دوال مباشرة
 نقول انه يوجد مورفزم دالي $\psi: F \rightarrow G$ اذا كان لكل $A \in \text{ob}(D_1)$
 فان $f(A): F(A) \rightarrow G(A)$ مورفزم الفئة D_2



$$G(u) \cdot f(A) = f(B) \cdot F(u)$$

ملاحظة: اذا كانت الدوال F, G غير مباشرة يصبح المنطق التالي:



$$G(u) \cdot f(B) = f(A) \cdot F(u)$$

ونقول عن المورفزم الدالي f انه انزومورفزم دالي اذا كان لكل $A \in \text{ob}(D_1)$ فان

$$f(A): F(A) \rightarrow G(A) \text{ انزومورفزم للفئة } D_2$$

تعريف: لنكن D_1, D_2 فئتين و $F, G: D_1 \rightarrow D_2$ دوال مباشرة. لنفرض أيضاً

$$f, g: F \rightarrow G$$

مورفزم دالي

برهان: لنكن X, X' مورفزم الفئة D_1 عنصري:

1- يوجد مورفزم دالي $f: h_{X'} \rightarrow h_X$

2- يوجد مورفزم دالي $g: h_X \rightarrow h_{X'}$

هناك مورفزم دالي f, g بين $X, X' \in \text{ob}(D_1)$ دوال مباشرة

$$h_X, h_{X'}: D \rightarrow \text{Set's}$$

المركبة من f و h_{X_1} هي $f \circ h_{X_1}$

لنفرض $f: h_{X_1} \rightarrow h_X$ معرف

ليكن $f(A): h_{X_1}(A) \rightarrow h_X(A)$ معرف

$$: \mathcal{L}(X_1, A) \rightarrow \mathcal{L}(X, A)$$

$$\forall u \in \mathcal{L}(X_1, A)$$

$$f(A)(u) = u \cdot \omega$$

لنضع:

على $f(A)$ نضع
المتكافؤ

$$u = v \Rightarrow u \cdot \omega = v \cdot \omega$$

$$f(A)(u) = f(A)(v)$$

وبالتالي:

نظير f مورفزم $f(A)$ من $\mathcal{L}(X_1, A)$ إلى $\mathcal{L}(X, A)$

وهذا يعني أن $f(A)$ مورفزم الفئة $\mathcal{L}(X_1, A)$

ليكن $u: A \rightarrow B$ مورفزم الفئة \mathcal{L} ولناخذ المركبة

$$h_{X_1}(A) \xrightarrow{f(A)} h_X(A)$$

$$h_{X_1}(u) \downarrow \quad \downarrow h_X(u)$$

$$h_{X_1}(B) \xrightarrow{f(B)} h_X(B)$$

$$h_X(u) \cdot f(A) \cdot h_{X_1}(A) \rightarrow h_X(B)$$

$$: \mathcal{L}(X_1, A) \rightarrow \mathcal{L}(X, B)$$

$$\forall \omega_0 \in \mathcal{L}(X_1, A) ; (h_X(u) \cdot f(A))(\omega_0) = h_X(u) (f(A)(\omega_0))$$

$$= h_X(u) (\omega_0 \cdot \omega) = u \cdot (\omega_0 \cdot \omega)$$

من جهة أخرى لدينا:

$$f(B) \cdot h_{X_1}(u) : h_{X_1}(A) \rightarrow h_X(B)$$

$$: \mathcal{L}(X_1, A) \rightarrow \mathcal{L}(X, B)$$

$$(f(B) \cdot h_{X_1}(u))(\omega_0) = f(B) (h_{X_1}(u)(\omega_0))$$

$$= f(B) (u \cdot \omega_0)$$

$$= (u \cdot \omega_0) \cdot \omega = u \cdot (\omega_0 \cdot \omega)$$

$$h_X(u) \cdot f(A)(\omega_0) = f(B) \cdot h_{X_1}(u)(\omega_0)$$

$$h_X(u) \cdot f(A) = f(B) \cdot h_{X_1}(u)$$

وهذا يعني أن

نظير f مورفزم f من $\mathcal{L}(X_1, A)$ إلى $\mathcal{L}(X, B)$

13

المركبة المباشرة
 البرهان: لنفرض \mathcal{L} فئة و $X \rightarrow X'$ مورفيم للفئة \mathcal{L} عند $f: h_X \rightarrow h_{X'}$

1- يوجد مورفيم $g: \hat{h}_X \rightarrow \hat{h}_{X'}$ في \mathcal{L}
 البرهان: لنأخذ $X, X' \in \text{ob}(\mathcal{L})$ توجد دوال مباشرة

$\hat{h}_X, \hat{h}_{X'}: \mathcal{L} \rightarrow \text{set's}$
 لنفرض $A \in \text{ob}(\mathcal{L})$ $\hat{h}_X(A) = \mathcal{L}(A, X)$ $\hat{h}_{X'}(A) = \mathcal{L}(A, X')$
 $g(A): \hat{h}_X(A) \rightarrow \hat{h}_{X'}(A)$
 $: \mathcal{L}(A, X) \rightarrow \mathcal{L}(A, X')$

$\forall u \in \mathcal{L}(A, X) \quad g(A)(u) = u \circ \alpha$
 وهذا يعني أن $g(A)$ مورفيم للفئة set's



لكن $v: A \rightarrow B$ مورفيم للفئة \mathcal{L} نضع على أن الخط



14

تبدلي ليكن:

$$\lambda \in \hat{h}_X(B) = \mathcal{L}(B, X)$$

$$\hat{h}_{X'}(v) \cdot g(B)(\lambda) = \hat{h}_{X'}(v) (g(B)(\lambda)) = \hat{h}_{X'}(v) (\omega \cdot \lambda) = (\omega \cdot \lambda) \cdot v$$

$$g(A) \cdot \hat{h}_X(v) (\lambda) = g(A) (\hat{h}_X(v) (\lambda)) = g(A) (\lambda \cdot v) = \omega \cdot (\lambda \cdot v)$$

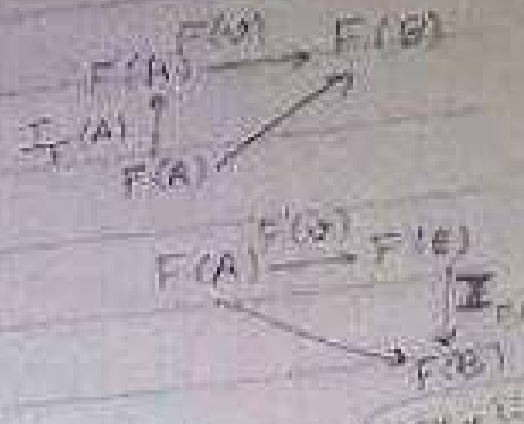


لكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ فئتين و $F: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ دالة مباشرة عند $I_F: F \rightarrow F$ مورفيم دالة مباشرة

المورفيم الدالة المتطابقة $I_F(A): F(A) \rightarrow F(A)$ لنفرض $A \in \text{ob}(\mathcal{L}_1)$
 البرهان: أيًا كان $I_F(A) = I_{F(A)}$

والذي يملك مورفيم في الفئة \mathcal{L}_2
 ليكن $v: A \rightarrow B$ مورفيم للفئة \mathcal{L}_1 نضع على أن الخط التالي

$$\begin{array}{ccc}
 F(A) & \xrightarrow{I_F(A)} & F(A) \\
 \downarrow F(v) & & \downarrow F(v) \\
 F(B) & \xrightarrow{I_F(B)} & F(B) \\
 F(v) \cdot I_F(A) & = & F(v) \cdot I_F(A) \\
 & = & F(v)
 \end{array}$$



$$I_F(B) \cdot F(v) = I_{F(B)} \cdot F(v) = F(v)$$

لكنه $I_F(A)$ و $I_F(B)$ عناصر

$$F, G, H: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2 \text{ و } G \circ F: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$$

$$f: F \rightarrow G, g: G \rightarrow H$$

$$g \circ f: F \rightarrow H$$

$$f(A): F(A) \rightarrow G(A) \text{ لكل } A \in \text{ob}(\mathcal{L}_1)$$

$$g(A): G(A) \rightarrow H(A)$$

دوال مباشرة. ولنفرض أيضاً أن مورفزمات دالية. عندئذ البرهان: أيّاً كان

مورفزمات للغة \mathcal{L}_2

نعرف $g \circ f(A): F(A) \rightarrow H(A)$ بالكل

والذي يمثل مورفزم للغة \mathcal{L}_2 .

لكنه $\nu: A \rightarrow B$ مورفزم للغة \mathcal{L}_1 . ولنزفهم على أن المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{array}{ccc}
 F(A) & \xrightarrow{g \circ f(A)} & H(A) \\
 \downarrow F(v) & & \downarrow H(v) \\
 F(B) & \xrightarrow{g \circ f(B)} & H(B)
 \end{array}$$

$$H(v) \cdot (g \circ f)(A) = H(v) \cdot (g(A) \cdot f(A))$$

$$= (H(v) \cdot g(A)) \cdot f(A)$$

لأنه g مورفزم دالي فإن المخطط الآتي تبديلي:

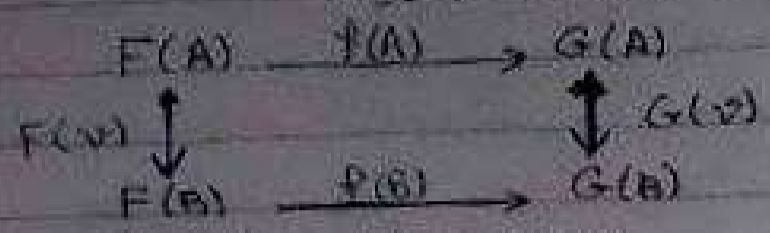
$$\begin{array}{ccc}
 g(A) & \xrightarrow{g(A)} & H(A) \\
 \downarrow G(v) & & \downarrow H(v) \\
 G(B) & \xrightarrow{g(B)} & H(B)
 \end{array}$$

$$H(v) \cdot g(A) = g(B) \cdot G(v)$$

15

$$H(v) \circ (g \circ f)(A) = (g(B) \circ G(v)) \circ f(A) \\ = g(B) \circ (G(v) \circ f(A)) \quad (\text{دعنا})$$

أفعلنا آيا كان f موريفيم فذاكي نوان المخطط التالي يتبلي



$$G(v) \circ f(A) = f(B) \circ F(v) \quad \text{توجد في (دعنا)}$$

$$H(v) \circ (g \circ f)(A) = g(B) \circ (f(B) \circ F(v)) \\ = (g(B) \circ f(B)) \circ F(v) \\ = (g \circ f)(B) \circ F(v) \rightarrow$$

المخطط التالي يتبلي

مبرهنة: ليكن D_1 و D_2 فثقتين و $F, G: D_1 \rightarrow D_2$ دالتان متساويتان

لتفرض أن $f: F \rightarrow G$ ايندمورفيزم دالي عندئذ يوجد مورفيزم دالي

$$g: G \rightarrow F \quad \text{فقط}$$

$$f \circ g = I_G$$

$$g \circ f = I_F$$

البرهان: لتفرض أن $f: F \rightarrow G$ ايندمورفيزم دالي

عندئذ حسب التعريف آيا كان $A \in \text{ob}(D_1)$

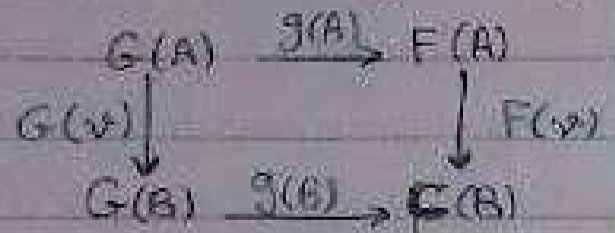
$$f(A): F(A) \rightarrow G(A) \quad \text{ايندمورفيزم للفئة } D_2 \text{ عندئذ يوجد مورفيزم}$$

$$g(A): G(A) \rightarrow F(A) \quad \text{فقط}$$

$$f(A) \circ g(A) = I_{G(A)}$$

$$g(A) \circ f(A) = I_{F(A)}$$

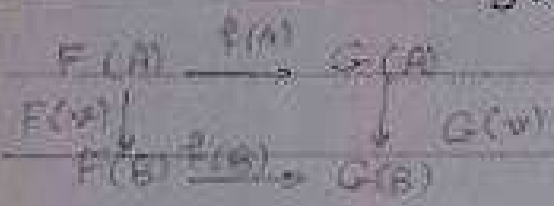
لنأخذ $v: A \rightarrow B$ مورفيزم للفئة D_1 لنأخذ المخطط التالي



$$F(v) \circ g(A) = I_{F(B)} \circ F(v) \circ g(A) = (g(B) \circ f(B)) \circ F(v) \circ g(A) \\ = g(B) \circ (f(B) \circ F(v)) \circ g(A)$$

$$F(A) \xrightarrow{F(v)} F(B)$$

ولآيا كان f مورفيزم دالي نوان:



$$f(B) \circ F(v) = G(v) \circ f(A)$$

$$\begin{aligned}
 F(x) \cdot g(A) &= g(B) (G(x) \cdot F(A)) \cdot g(A) \\
 &= g(B) \cdot G(x) \cdot (F(A) \cdot g(A)) \\
 &= g(B) \cdot G(x) \cdot I_{G(A)} \\
 &= g(B) \cdot G(x) \rightarrow
 \end{aligned}$$

وبناءً على ذلك

نلاحظ أن الصورة الناتجة هي الصورة الناتجة عن تطبيق دالة g على

$$F(x) \cdot F(A) \rightarrow G(A)$$

$$\begin{aligned}
 g(A) \cdot G(A) &= F(A) \\
 G(A) \cdot F(A) &= G(A)
 \end{aligned}$$

أثبتت أن عملية ضرب المعرفة على المتغيرات التالية هي عملية