◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة العاشرة

◄ عنوان المحاضرة: دراسة تأثير دوران الأرض على الأجسام الساقطة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- معادلات التوازن النسبية.

2-تأثير دوران الأرض على الأجسام الساقطة.

3- مبدأ دالا امبير في علم التحريك.

من المحاضرة السابقة إن علاقة التسارع المطلق هي $\Gamma_a = \Gamma_e + \Gamma_r + \Gamma_c$...

حسب قانون التحريك الأساسي المطلق $\vec{F} = m\vec{\Gamma_a}$

$$\vec{F} = m\vec{\Gamma_r} + m\vec{\Gamma_e} + m\vec{\Gamma_c} \Rightarrow m\vec{\Gamma_r} = \vec{F} - m\vec{\Gamma_e} - m\vec{\Gamma_c}$$

$$m\vec{\Gamma_r} = \vec{F} + \vec{J_e} + \vec{J_c}$$

وبالإسقاط على المحاور الإحداثية نجد..

$$\boxed{mx'' = F_x + J_{ex} + J_{cx} \ , \ my'' = F_y + J_{ey} + J_{cy} \ , \ mz'' = F_z + J_{ez} + J_{cz}}$$

وهي معادلات القوة النسبية.

معادلات التوازن النسبي

من علاقة القوة النسبية $m\Gamma_r = F + J_e + J_c \ldots (1)$ وبإخذ التسارع النسبي يساوي الصفر.
وإذا وجدت نقطة مادية بوضع التوازن من الإحداثيات الديكارتية المتحركة
فإن سرعتها النسبية وتسارعها النسبي $v_r = \Gamma_r = 0$ وبالتالي يكون التسارع المتمم يكون معدوم

وبالتالي إذا عوضنا قيم كل من ((Γ_c و Γ_r)) بالمعادلة (1) ينتج لدينا $\Gamma_c = 2[\vec{\omega} \times \vec{v_r}] = 0$

$\boxed{F + J_e = 0}$ وهي معادلة التوازن النسبي.

وبالتالي نلاحظ أن معادلة التوازن النسبية تكون كمعادلة التوازن المنسوبة لجملة احداثيات ثابتة شريطة أن نضيف قوة العطالة الجرّية إلى القوة المؤثرة على النقطة المادية.

مثال على ذلك ..

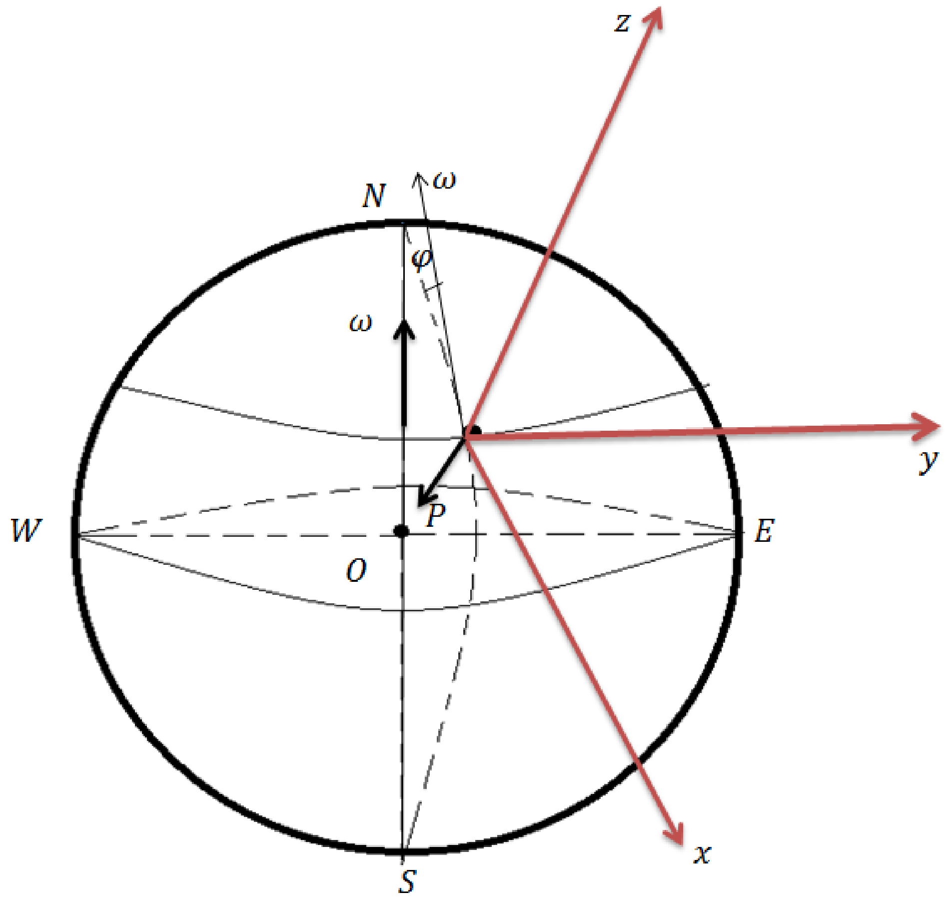
نطبق ما سبق على سفينة فضائية بجوار الأرض ولنفرض أن $\vec{F}$ هي ثقل نقطة مادية ضمن السفينة وأن السفينة تتحرك متسارعة ومبتعدة عن مركز الأرض وإن قوة العطالة الجرّية تتجه نحو مركز الأرض وبالتالي فإن شخصاً موجوداً بهذه السفينة سيشعر بقوة إضافية كبيرة تجذبه نحو الأرض

أما في حال اقتراب السفينة من مجال جاذب بتسارع موجب فإن قوة العطالة الجرّية المؤثرة على أي نقطة M كتلتها m داخل هذه السفينة تساوي $J_e = -m\Gamma_e$ وهي بعكس اتجاه قوة الجذب $\vec{F}$ وقد تتساوى هاتان القوتان بالقيمة المطلقة ولا يكون للنقطة أي وزن.

وهذا ما يحدث لروّاد الفضاء احياناً حين يتعرضون لحالة انعدام الوزن وهذا يختلف عن انعدام الوزن الذي ينعدم فيها تماماً تأثير قوة الجذب عندما تتحرك السفينة بحركة منتظمة بعيداً عن أي مجال جاذب.

((**وهذا ما يعرف بانعدام الوزن**))

دراسة تأثير دوران الأرض على الأجسام الساقطة



ندرس السقوط الحر لنقطة مادية M على سطح الأرض من ارتفاع قليل بالمقارنة مع طول نصف قطر الكرة الأرضية حيث تؤثر على هذه النقطة المادية قوة الثقالة الأرضية فقط ((P وزن الجسم)) وسوف نهمل مقاومة الهواء ولنأخذ جملة احداثية متحركة مع الأرض فيها المحور oz يتجه شاقولياً نحو الأعلى والمحور ox مماس لخط الطول ويتجه نحو الجنوب واخيراً المحور oy مماس لخط العرض ويتجه نحو الشرق عند معالجة سقوط هذه النقطة بالنسبة لهذه الجملة الاحداثية المختارة يجب أن نأخذ بعين الاعتبار قوة العطالة الجرّية وقوة العطالة المتممة (J_c, J_e) إضافة إلى قوة ثقلها ، إن قوة العطالة الجرّية تساوي $J_e = m\omega^2 r$ ذلك لأن دوران الأرض حول محورها يتم بسرعة زاوية ((أي التسارع يساوي الصفر)) و(r) هو بعد النقطة عن محور الدوران ،إن دوران الأرض حول محورها يعتبر بطيئاً بالنسبة للنجوم الأخرى ويتم بسرعة دورة واحدة خلال 23 ساعة و56 دقيقة و4 ثوانٍ أي أن السرعة الزاوية

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0.00000722\,.s^{-1}$$

من ذلك يتبين لنا صغر قوة العطالة الجرّية فهذه القوة تتناسب طرداً مع مربع ω فإذا رمزنا بقوة جذب الأرض للنقطة المادية بـالرمز $\vec{F}$ فإن الاختلاف بين $\vec{F}$ و $\vec{P}$ قوة الثقالة يكون صغيراً جداً ويبلغ حده الأعظمي عند خط الاستواء تساوي 3470 وبالتالي نلاحظ أن قوة العطالة الجرّية تدخل في قوة الثقالة الارضية $P = mg$ المتجهة حسب الاتجاه السالب للمحور oz (P محمولة على oz) ينتج مما سبق أنه من أجل تأثير دوران الأرض على سقوط الأجسام يكفي فقط إضافة قوة العطالة المتممة $J_c = -m\Gamma_c$ للقوة P((لماذا أهملت قوة العطالة الجرّية))

بإسقاط العلاقة $J_c = -m\Gamma_c$ على جملة المحاور الاحداثية نجد ...

$$mx'' = -m\Gamma_{cx} \quad , \quad my'' = -m\Gamma_{cy} \quad , \quad mz'' = -mg - m\Gamma_{cz}$$

$$\boxed{x'' = -\Gamma_{cx} \quad , \quad y'' = -\Gamma_{cy} \quad , \quad z'' = -g - \Gamma_{cz} \ldots (1)}$$

$$\Gamma_c = 2[\vec{\omega} \times \vec{v_r}] \Longrightarrow \Gamma_c = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

إذا رمزنا بـ φ للزاوية المحصورة بين محور الدوران والمحور oz فإن ..

من الرسم نجد: $\omega_x = -\omega\cos\varphi \ , \ \omega_y = 0 \quad , \ \omega_z = \omega\sin\varphi$

نجد ....
$$\Gamma_c = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\omega\cos\varphi & 0 & \omega\sin\varphi \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_{cx} = -2\omega \sin\varphi\, y' , \Gamma_{cy} = 2\omega(\cos\varphi\, z' + \sin\varphi\, x') , \Gamma_{cz} = -2\omega\cos\varphi\, y' \;...\,(2)$$

وبالتالي إذا عوضنا (2) بالمعادلات (1) ...

$$x'' = 2\omega \sin\varphi\, y' , y'' = -2\omega(\cos\varphi\, z' + \sin\varphi\, x')$$
$$, z'' = -g + 2\omega\cos\varphi\, y' \;...\,(3)$$

و هي معادلات تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية يمكن مكاملتها مرة واحدة مباشرةً لأن (ω,φ) ثوابت وبالتالي من أجل ذلك نفترض أن

$$t = 0 \begin{cases} x = y = z = 0 \\ x' = \; y' = \; z' = 0 \end{cases}$$

ضمن هذه الشروط يكون لدينا بالمكاملة ...

$$x' = 2\omega \sin\varphi\, y , y' = -2\omega(\cos\varphi\, z + \sin\varphi\, x), z' = -gt + 2\omega\cos\varphi\, y \;...\,(4)$$

ملاحظة : من شروط البدء يكون جميع الثوابت المكاملة تساوي الصفر.

و هذه المعادلات نحلها حسب تقريب السلاسل ونقربها حسب التقريب الصفري ونفترض $\omega = 0$ فنجد..

$$x' = 0, y' = 0 , z' = -gt$$

وبالمكاملة مرة اخرى وبأخذ الثوابت اصفار حسب شروط البدء نحصل على...

$$x = 0 \;, \qquad y = 0 \;, \qquad z = -\frac{1}{2}gt^2$$

وبالتالي بوضع هذه القيم بالمعادلات ...(4) نحصل على...

$$x' = 0 \,, \qquad y' = \omega g t^2 \cos\varphi \;, \qquad z' = -gt$$

بالمكاملة مرة اخرى نحصل على...

$$x = 0 \,, y = \frac{1}{3}g\omega t^3 \cos\varphi \;, z = -\frac{1}{2}gt^2 \;....\,(5)$$

نسمي هذا التقريب الأول وللحصول على تقريب ادق (الثاني) نعوض المعادلات (5) بالمعادلات (4) وبالتالي نحصل على التقريب الثاني و هذا التقريب يسمى **بتقريب السلاسل** هذه المعادلات تعطي قانون الحركة لنقطة مادية حيث تدخل فيها قوة العطالة المتممة اي ان ظهور تأثير دوران الأرض على الأجسام الساقطة ، وبالتالي من هذه المعادلات عند سقوط النقطة المادية فإنها تميل عن الشاقول باتجاه الشرق وميلانها يعطى بالعلاقة $y = \frac{1}{3}g\omega t^3 \cos\varphi$ و هو متجه نحو الشرق ،

أما التقريب الثاني فيكون متجه نحو شرق الجنوب

((قد يطلب منا ايجاد التقريب الثاني والثالث))

مبدأ دالا مبير في علم الميكانيك

كنا نعتبر بالدراسة السابقة أن التوازن هو حالة خاصة من حالات الحركة تحدث عندما ينعدم تسارعها وبالتالي تنعدم محصلة القوة المؤثرة على النقطة ولكن تمثيل نيوتن ليس التمثيل الوحيد بالميكانيك حيث يمكن بناء علم ميكانيك على أسس ومبادئ اخرى من اهمها مبدأ **دالا مبير**

أولاً : يعتمد دالا مبير أن الحركة حالة خاصة من التوازن فإذا فرضنا نقطة مادية M كتلتها m تتحرك بتسارع تحت تأثير قوى محصلتها $\vec{F}$ ومعادلتها كما يراها نيوتن $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$

$$\vec{F} - m\vec{\Gamma} = \vec{0}$$

ولنفرض أن $-m\vec{\Gamma} = \vec{J}$ عندئذٍ $\vec{F} + \vec{J} = 0$ يسمى $\vec{J}$ قوة العطالة و m خاضعة لقوتين الأولى القوة الفعالة $\vec{F}$ والثانية القوة العطالية $\vec{J}$ محصلتها تساوي الصفر وبالتالي يمكن اعتبار أن النقطة المادية متوازنة دوماً على مسارها تحت تأثير هاتين القوتين ((وهو نص دالا مبير لنقطة طليقة)) أما عندما تكون النقطة المادية مقيدة على منحني فإنها تخضع لقوة إضافية هي قوة رد الفعل أو قوة شد الحبل (الخيط) بالإضافة إلى القوة العطالية $\vec{F} + \vec{J} + \vec{R} = 0 \ldots (*)$ حيث $\vec{R}$ قوة الربط للمنحني او للسطح

ثانياً : لا يعتمد مبدأ دالا مبير على القوة المؤثرة إذ يمكن تعميمها ليشمل عزوم القوى المؤثرة وبالتالي إذا أخذنا العلاقة التالية $\vec{F} + \vec{J} = 0$ وضربناها خارجياً ب $(\vec{r})$ نجد..

$$(\vec{r} \times \vec{F}) + (\vec{r} \times \vec{J}) = 0$$

حيث $(\vec{J} \times \vec{r})$ محصلة القوى العطالية المؤثرة على النقطة المادية

$(\vec{F} \times \vec{r})$ محصلة عزوم القوى الفعالة للنقطة المادية بالنسبة للمبدأ (o)

وهذان العزمان متعاكسان مباشرة .((النقطة المادية طليقة))

اما إذا كانت النقطة المادية مقيدة من العلاقة $(*)$..

$$\vec{F} + \vec{J} + \vec{R} = 0$$

$$(\vec{r} \times \vec{F}) + (\vec{r} \times \vec{J}) + (\vec{r} \times \vec{R}) = 0$$

هذه العزوم تقع بمستوي واحد جميعها متعامدة على $(\vec{r})$.

تمارين وظائف

التمرين الأول : M نقطة مادية تتحرك على المستقيم oA بالسرعة v، المستقيم oA يدور حول θ في المستوي x,y بسرعة زاوية مقدارها ω .

أوجد سرعة النقطة المادية M بالنسبة للمستوي بدلالة $\overrightarrow{oM} = \vec{r}$

التمرين الثاني : M نقطة مادية تتحرك على المستوي AB يميل عن الأفق بزاوية α وبسرعة نسبية قيمتها $v_r = \sqrt{2gy}$ حيث g ثابت و y ترتيب النقطة على المحور y المتجهة نحو الأسفل والمستوي AB يتحرك على ارض افقية وبجهة حركة M عليه بسرعة ثابتة v_e .
حدد المسار المطلق للنقطة M وكذلك سرعتها المطلقة لحظة تماس هذه النقطة على الارض مع العلم أن النقطة M كانت لحظة البدء على ارتفاع h عن الارض.

التمرين الثالث : تتحرك نقطة مادية ثقيلة M مربوطة بخيط خفيف في مستوي شاقولي

أوجد مواضع التوازن حسب دالا امبير.

" انتهت المحاضرة "

صفحتنا على فيسبوك: IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/	مجموعة السنة الثانية : Improve Our Mathematics	مجموعة السنة الأولى: طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق 2017

إعداد: محمد علي فليون ** رهف سليمان