نظري

◄ دكتور المادة: ملك مارديني

◄المحاضرة: الخامسة

عنوان المحاضرة: المعادلات من المرتبة الثانية وبأمثال متغيرة بجوار النقطة الشاذة النظامية.

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-مبرهنة الوجود والوحدانية

2-كيفية إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية بجوار النقطة الشاذة النظامية

3-أمثلة عن ما سبق ^_^

حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية ومن المرتبة الثانية

وبأمثال متغيرة بجوار النقطة الشاذة النظامية

مبرهنة الوجود والوحدانية

بفرض أن x_0 نقطة شاذة نظامية للمعادلة عندئذ يوجد حل واحد على الأقل للمعادلة التفاضلية بجوار النقطة x_0 يكون قابلاً للحل وقابلاً للنشر على شكل متسلسلة

$$y=(x-x_0)^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n \quad : C_0\neq 0$$

$$\Rightarrow \quad y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^{n+\lambda}$$

وتكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n$ متقاربة في المجال $|x-x_0|<R$

خطوات إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية بجوار النقطة الشاذة النظامية :

لتكن المعادلة التفاضلية $(x-x_0)^2y''+(x-x_0)^1P(x)y'+q(x)y=0$

أي أن النقطة x_0 فعلاً شاذة نظامية والآن إليكم الخطوات ^_^:

1) نبحث عن حل للمعادلة التفاضلية من الشكل:

$$y=(x-x_0)^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n \;:C_0\neq 0\; or\; y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^{n+\lambda}$$

$$if\,(x_0==0)\; then\,\{\,y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+\lambda}\,\}$$

2) نوجد المشتقات ونعوض في المعادلة ثم نوحد القوى ونوجد الحدود الدنيا فنحصل على العلاقة التكرارية........

3) نوجد المعادلة المميزة $\lambda(\lambda-1)+p(0)\lambda+q(0)=0$ وهي تمثل أمثال الحد الأول بالمتسلسلة الناتجة وهي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة ل λ ثم نوجد جذور هذه المعادلة فنحصل على $(\lambda_1\&\&\lambda_2)$......

بعد ذلك نقارن بين $((\lambda_1\&\&\lambda_2))$ نأخذ الجذر الأكبر ((وبفرض هو λ_1)) ونعوضه في العلاقة التكرارية فنحصل على الحل الخاص الأول

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+\lambda_1}$$

4) نوجد الحل الخاص الثاني وذلك حسب الحالات الثلاثة التالية:

الحالة الأولى:

$(\lambda_1-\lambda_2)$ ليس عدد صحيح ومنه الحل يكون من الشكل التالي :

$$y_2=|x|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty}B_n x^n \;;B_0\neq 0$$

ملاحظة :

B_n الثوابت التي تعينها القيمة λ_2 تختلف عن C_n التي تعينها القيمة λ_1

الحالة الثانية:

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ جذر مضاعف وبالتالي الحل يكون كما يلي :

$$y_2 = |x|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n + y_1 \ln|x|$$

الحالة الثالثة:

$(\lambda_1 - \lambda_2)$ عدد صحيح ومن الحل يكون على الشكل التالي:

$$y_2 = |x|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n + \alpha y_1 \ln|x|$$

ومنه يكون الحل العام هو تركيب خطي للحلين الخاصين أي:

$$\boldsymbol{y = Ay_1 + By_2}$$

تمرين : لتوضيح الأفكار السابقة ^_^

باستخدام متسلسلات القوى أوجد الحل العام للمعادلة التالية في جوار $x = 0$

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

الحل:

$$y'' + \frac{y'}{2x} + \frac{y}{4x} = 0$$

نلاحظ أن $x = 0$ نقطة شاذة نظامية (لأنها صفراً من الدرجة الأولى)

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\lambda} \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) C_n x^{n+\lambda-1}$$

$$\Rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) C_n x^{n+\lambda-2}$$

إن صيغة المجموع التي تعبر عن المشتق الأول أو الثاني تبدأ من الصفر وذلك بسبب((x^λ))التي أدخلناها إلى المتسلسلة لذلك لم تختفي الحدود $n = 0 \;\&\&\; n = 1$ في y' و y'' والآن نعوض في المعادلة

$$4\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)C_n x^{n+\lambda-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)C_n x^{n+\lambda-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+\lambda}=0$$

$$x^{\lambda}[\sum_{n=0}^{\infty}4(n+\lambda)(n+\lambda-1)C_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+\lambda)C_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n}]=0$$

نبدل في المتسلسلة (3) كل n ب $(n-1)$

$$x^{\lambda}[\sum_{n=0}^{\infty}4(n+\lambda)(n+\lambda-1)C_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+\lambda)C_n x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}C_{n-1} x^{n-1}]=0$$

$$x^{\lambda}\Bigg[4(\lambda)(\lambda-1)C_0 x^{-1}+2\lambda C_0 x^{-1}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[4(n+\lambda)(n+\lambda-1)C_n+2(n+\lambda)C_n+C_{n-1}]x^{n-1}\Bigg]=0$$

بالمطابقة نجد ما يلي :

$$4(\lambda)(\lambda-1)C_0+2\lambda C_0=0\,;C_0\neq 0\Longrightarrow 4\lambda^2-4\lambda+2\lambda=0$$

ومنه نجد $\lambda_1=\frac{1}{2}\ \&\&\ \lambda_2=0$

نأخذ الجذر الكبير $\lambda_1=\frac{1}{2}$ وبمطابقة أمثال x^{n-1} نجد

$$\Longrightarrow\ 4(n+\lambda)(n+\lambda-1)C_n+2(n+\lambda)C_n+C_{n-1}=0$$
$$\Longrightarrow\ C_n[2(n+\lambda)+4(n+\lambda)(n+\lambda-1)]+C_{n-1}=0$$
$$\Longrightarrow\ C_n(2n+2\lambda)(2n+2\lambda-1)+C_{n-1}=0$$

$$\boxed{C_n=-\frac{C_{n-1}}{(2n+2\lambda)(2n+2\lambda-1)}}$$

وهي العلاقة التكرارية العامة التي من أجل كل قيمة ل λ ستعطينا علاقة تكرارية من خلالها نستطيع أن نجد الثوابت $C_n\ \&\&\ B_n$

الحل الخاص الأول نعوض $\lambda_1=\frac{1}{2}$ في العلاقة التكرارية..

$$C_n = -\frac{C_{(n-1)}}{2n(2n+1)}$$

$$n = 1 \Rightarrow C_1 = -\frac{C_0}{2.3} = -\frac{C_0}{3!}$$

$$n = 2 \Rightarrow C_2 = -\frac{C_1}{4.5} = \frac{C_0}{5!}$$

$$C_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}C_0 \to y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\lambda_1} \xrightarrow{\text{نعوض}\, C_n} y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} C_0 x^{\frac{2n+1}{2}}$$

بفرض $C_0 = 1$ ومنه

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}$$

وهو عبارة عن المجموع لدالة $\sin(\sqrt{x})$ وبالتالي ...

$$\boxed{y_1 = \sin\left(\sqrt{x}\right)}$$

<u>الحل الخاص الثاني</u> نلاحظ أن $\lambda_1 - \lambda_2$ ليس عدد صحيح

وبالتالي الحل الخاص الثاني من الشكل $y_2 = |x|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$

نعوض $\lambda_2 = 0$ بالعلاقة التكرارية العامة لكي نجد الثوابت ومنه

$$C_n = -\frac{C_{n-1}}{(2n+2\lambda)(2n+2\lambda-1)} = -\frac{C_{n-1}}{2n(2n-1)}$$

$$n = 1 \Rightarrow C_1 = -\frac{C_0}{2!} \;\&\&\; n = 2 \Rightarrow C_2 = \frac{C_0}{4!}$$

$$\Rightarrow n = 3 \Rightarrow C_3 = -\frac{C_0}{6!}$$

بفرض $C_0 = 1$ ومنه $C_n = \frac{(-1)^n}{2n!}$ وبالتالي..

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\lambda} \Rightarrow y_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^n$$

ومنه الحل الخاص هو

$$\boxed{y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} \left(\sqrt{x}\right)^{2n} = \cos(\sqrt{x})}$$

وبالتالي الحل العام هو تركيب خطي للحلين الخاصين

$$y = Ay_1 + By_2$$

$$\boxed{y = Asin\left(\sqrt{x}\right) + Bcos\left(\sqrt{x}\right)}$$

انتهت المحاضرة

صفحتنا على فيسبوك: IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/	مجموعة السنة الثانية : Improve Our Mathematics	مجموعة السنة الأولى: طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق 2017

إعداد: محمد شهلا – فادي الشريطي – مهيار طعمه