الفصل الثاني

متسلسلات الحلول للمعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية

Series solutions of second order linear equations

٢ . ١ . تمهيد:

سنعالج في هذا الفصل المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية التي يكون فيها الدالة والمتغير عقديين، مستخدمين بذلك متسلسلات القوى اللانهائية وفق قوى المتغير العقدي.

قبل البدء في إثبات مبرهنات الوحدانية والوجود وكيفية حل هذه المعادلات لا بد من مراجعة أهم التعاريف والمفاهيم الأساسية المتعلقة بالمتسلسلات.

٢ . ٢ . دليل المتسلسلة: Index of a series

دليل المتسلسلة هو المتغير الذي تجرى عليه عملية الجمع، ويظهر في تعبير المتسلسلة كما يظهر أسفل علامة الجمع $\sum$. فمثلاً في المتسلسلات التالية:

$$\sum_{n=0}^{n=100} \frac{n^2+1}{(n+1)!} \;,\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \;,\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inkz}$$

حيث $z = x + iy$ متحول عقدي.

n هو الدليل. ويمكن تغيير الدليل n إلى m أو k دون أن يؤثر في قيمة المتسلسلة، ولذا يسمى الدليل n بالدليل الدمية (Dummy Index) فمثلاً:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m z^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k z^k}{k!}$$

وسنوضح كيف يمكن تغيير الدليل n في الأمثلة المختلفة التالية دون أن يؤثر ذلك في قيمة المتسلسلة:

.١

$$\sum_{n=2}^{\infty} Q_n z^n = Q_2 z^2 + Q_3 z^3 + Q_4 z^4 + ... + Q_n z^n + ...$$

$$= Q_{0+2} z^{0+2} + Q_{1+2} z^{1+2} + Q_{2+2} z^{2+2} + ... + Q_{m+2} z^{m+2} + ...$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} Q_{m+2} z^{m+2} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{n+2} z^{n+2} \quad ; \ Q_n \in R \text{ or } Q_n \in C$$

فقد غيرنا الدليل $n + 2 \to n$ حيث أخذنا في عين الاعتبار التخفيض 2.

.٢ $$S = \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) Q_n (z-Q)^{n-2}$$

إنه يمكن كتابة هذه المتسلسلة على شكل متسلسلة للحد العام $(z - Q)^n$ عوضاً عن $(z - Q)^{n-2}$ للحصول على ذلك نغير الدليل $n + 2 \to n$ ونبدأ في الأخذ بعين الاعتبار التخفيض 2 كما هو في المثال السابق.

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3) Q_{n+2} (z-Q)^n$$

.٣ $$z^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r).Q_n.z^{n+r-1}$$

أولاً ندخل z^2 تحت الجمع فنحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) Q_n z^{n+r+1}$$

ويمكن أن نكتب هذه المتسلسلة على شكل متسلسلة ذات الحد العام z^{n+r} بتغيير الدليل $(n \to n-1)$، ونبدأ في الأخذ بعين الاعتبار بداية المجموع من $n = 1$ كما يلي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) Q_n z^{n+r+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1) Q_{n-1} z^{n+r}$$

ويمكن التحقق من أن الحدود في المتسلسلتين متطابقة تماماً.

٤. في المثال التالي نأخذ المعادلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nQ_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n z^n$$

لمساواة معاملات الحدود من نفس قوة z في طرفي المعادلة فإنه من السهل كتابة المتسلسلتين بالنسبة للحد العام z^n أي يجب أن نغير الدليل n في المتسلسلة الأولى $(n \to n+1)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)Q_{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n z^n$$

نستنتج أن: $(n+1)\,Q_{n+1} = Q_n$ من أجل $n = 0, 1, 2, \ldots$

أو: $$Q_{n+1} = \frac{1}{n+1} Q_n$$

إذن: $$Q_1 = \frac{1}{1} Q_0 \;,\; Q_2 = \frac{1}{2} Q_1 = \frac{1}{2\cdot 1} Q_0 = \frac{Q_0}{2!}$$

$n = 3 \Rightarrow 4Q_4 = Q_3$
$= \frac{1}{(3)(2)} Q_0$

$$Q_3 = \frac{1}{3} Q_2 = \frac{1}{3}\frac{Q_0}{2!} = \frac{Q_0}{3!} \;, \ldots ,$$

$Q_4 = \frac{1}{(4)(3)(2)} Q_0$

وعموماً: $$Q_n = \frac{1}{n!} Q_0 \quad , n = 1, 2, \ldots$$

إذن العلاقة الجديدة تعين جميع المعاملات بدلالة الحد Q_0.

إذن: $$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} Q_0 \frac{z^n}{n!} = Q_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = Q_0 e^z$$

وفي كتابة المتسلسلة الأخيرة فقد استعملنا المصطلح العام $0! = 1$.

٣.٢. متسلسلة القوى: Power series

متسلسلة القوى حول نقطة $z = z_0$ هي متسلسلة لا نهائية في قوى $(z - z_0)$ الموجبة على الشكل:

$$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\dots$$

$; c_n \in R \text{ or } c_n \in C$

حيث $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ ثوابت تعرف بمعاملات المتسلسلة (Coefficients) و $z=z_0$ نقطة ثابتة تسمى مركز المتسلسلة (Center). ونؤكد أن متسلسلة القوى لا تحتوي على قوى سالبة أو كسرية للمتغير $(z-z_0)$. وإذا كان مركز المتسلسلة هو نقطة الأصل $(z_0=0)$ فإن المتسلسلة تأخذ الشكل:

$$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n=c_0+c_1z+c_2z^2+\dots$$

وسنعرض في هذا الفصل أن المعاملات C_i والمركز z_0 هي كميات حقيقية على وجه العموم. ويسمى المجموع:

$$S_n(z)=\sum_{n=0}^{N}C_N(z-z_0)^N=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\dots+c_N(z-z_0)^N$$

حيث N عدد صحيح موجب بالمجموع الجزئي (Partial sum) لمتسلسلة القوى بينما يسمى مجموع الحدود المتبقية:

$$R_N(z)=\sum_{n=N+1}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=C_{N+1}(z-z_0)^{N+1}+c_{N+2}(z-z_0)^{N+2}+\dots$$

بالباقي (Remainder) وواضح أن:

$$R_N(z)=S(z)-S_N(z)$$

ونلخص فيما يلي دون برهان، بعض النتائج الهامة المتعلقة بالمتسلسلات اللانهائية وخاصة متسلسلات القوى.

١ . يقال عن متسلسلة القوى: $S_n(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ إنها متقاربة أو تقاربية (Convergent) عند النقطة z إذا كانت:

$$\lim_{N\to\infty} S_N(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n (z-z_0)^n$$

موجودة.

وواضح أن المتسلسلة متقاربة عند مركزها $z = z_0$:

$$\lim_{N\to\infty} S_N(z_0) = \lim_{N\to\infty} C_0 = C_0 = S(z_0)$$

أي إن النهاية موجودة.

وإذا لم توجد هذه النهاية تكون المتسلسلة متباعدة أو تباعدية (Divergent) عند النقطة z.

وقد تكون المتسلسلة متقاربة عند كل قيم z وقد تكون متقاربة عند بعض قيم z ومتباعدة عند القيم الأخرى.

٢ ـ يقال عن متسلسلة القوى $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ إنها متقاربة مطلقاً (Converges absolutely) عند النقطة z إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| c_n (z-z_0)^n \right|$$

متقاربة والعكس غير صحيح.

٣ . ولمعرفة التقارب المطلق نستخدم إحدى الاختبارات النافعة لمتسلسلة قوى وهو اختبار النسبة. إذا كانت من أجل قيمة z ثابتة (Ratio Test):

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{c_n (z-z_0)^n} \right| = |z-z_0| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \ell$$

وتكون متسلسلة القوى متقاربة مطلقاً عند قيمة z إذا كان $\ell < 1$ ومتباعدة إذا كان $\ell > 1$. وإذا كان $\ell = 1$ فالاختبار غير حاسم، كما يمكن استخدام بعض الاختبارات الأخرى في حال الضرورة (التحليل العقدي (١)).

٢ . ٤ . النقاط العادية والنقاط الشاذة:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية الآتية:

$$w'' + P(z)\,w' + Q(z)\,w = 0 \qquad (1)$$

$w = w(z)$ دالة تابعة لـ z.

$P(z), Q(z)$ دالتان عقديتان تتبعان للمتغير z.

١ . إذا كانت الدالتان $P(z)$, $Q(z)$ تحليليتان عند النقطة $z = z_0$ فتسمى هذه النقطة بالنقطة العادية لـ (1) ونسمي كل نقطة غير عادية بأنها نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية.

وعلى سبيل المثال فإن المعادلة:

$$w'' + \frac{1}{(z-2)(z+2)}w' + \frac{z}{(z-1)^2}w = 0 \qquad (2)$$

لها نقاط شاذة هي:

$$z = 1 \;;\; z = 2 \;;\; z = -2$$

أما بقية النقاط فهي نقاط عادية للمعادلة التفاضلية المفروضة.

٢ . ٥ . مبرهنة (١):

إذا كانت $z = z_0$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة:

$$w'' + P(z)\,w' + Q(z)\,w = 0 \qquad (3)$$

وإذا كانت $P(z)$ و $Q(z)$ دالتين تحليليتين عند $z = z_0$ فإن الحل العام لهذه المعادلة هو:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n (z - z_0)^n = Q_0 w_1(z) + Q_1 w_2(z)$$

حيث $Q_1, \ Q_0$ ثابتان اختياريان و $w_2(z)$، $w_1(z)$ متسلسلتان تحليليتان عند $z = z_0$ ومستقلتان خطياً. ونصف قطر تقارب كل منهما أقل من أصغر نصفي قطر في تقارب متسلسلة $P(z)$ و $Q(z)$.