◄ دكتورة المادة: ريم الحاج خليفة

◄ المحاضرة: الحادية عشرة ◄ عنوان المحاضرة: المثاليات الأولية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ تعريف المثاليات الأولية.

٢ـ مبرهنتان تخص المثاليات الأولية.

٣ـ تمارين عن المثاليات الأولية.

تعريف المثاليات الأولية : لتكن R حلقة ولتكن $P \neq R$ مثالياً في R عندئذ نقول عن المثالي P أنه أولي في R اذا كان لأجل المثاليين A, B من R بحيث $A.B \subseteq P$ عندئذ إما

$$A \subseteq P \quad \vee \quad B \subseteq P$$

مبرهنة : لتكن R حلقة ولتكن $P \neq R$ مثالياً في R الشرط اللازم والكافي لكي يكون المثالي P أولياً في R هو ان يتحقق ما يلي $\forall a, b \in R : a.b \in P$ عندئذ يكون إما $a \in P \quad \vee \quad b \in P$.

البرهان : لزوم الشرط : بفرض أن المثالي P أولي في R وليكن $a, b \in R$ بحيث $a.b \in P$ وبالتالي يكون

$$(aR)(bR) \subseteq (a.b)R \subseteq P$$

لأن $a \in R$ و $b \in R$ ومنه بما أن P أولي اما $(aR) \subseteq P$ أو $(bR) \subseteq P$

كفاية الشرط : ليكن A, B مثاليين في R بحيث $A.B \subseteq P$ وبفرض أن $A \not\subset P$ عندئذ يوجد عنصر $a \in A$ بحيث $a \notin \mathrm{P}$ وليكن $b \in B$ عندئذ يكون

$$a.b \in A.B \subseteq P$$

وحسب الفرض لدينا $b \in B$ عندئذ يكون $b \in P$ وبالتالي $B \subseteq P$ ومنه المثالي P أولي .

ملاحظة : بمجرد انتماء عنصر من المجموعة الى مثالي أولي عندئذ تكون المجموعة محتواة في المثالي الأولي .

تذكرة : تعرف حلقة الخارج بأنه اذا كان لدينا R حلقة و A مثالي في R عندئذ تعرف بالشكل :

$$R/A = \{r + A : r \in R\}$$

مبرهنة : لتكن R حلقة تبديلية ولتكن P مثالياً في R الشرط اللازم والكافي لكي يكون المثالي P أولياً في R هو ان تكون حلقة الخارج R/P منطقة تكاملية .

البرهان : لزوم الشرط : بفرض أن المثالي P أولي في R وبما أن R تبديلية فتكون R/P تبديلية وأن P اولياً في في R فإن $P \neq R$ (حسب التعريف) وبالتالي يكون لدينا $1 \notin P$ (حسب مبرهنة سابقة لدينا اذا كان $P = R \Leftrightarrow 1 \in P$) هذا يعني أن $P \neq 1 + P$ ومنه R/P حلقة واحدية .

وليكن لدينا $a + P, b + P$ عناصر من الحلقة R/P عندئذ حسب تعريف حلقة الخارج نجد أن

$$(a + P).(b + P) = P$$

$$(a.b) + P = P$$

أي $a.b \in P$ وبما أن P أولي فإن $a \in P \quad \vee \quad b \in P$ عندئذ إما

$$a + P = P \quad \vee \quad b + P = P$$

اي لا تحوي قواسم الصفر ومنه فإن R/P منطقة تكاملية.

كفاية الشرط : بفرض أن R/P منطقة تكاملية عندئذ $1 + P \neq P$ اي $1 \notin P$ **ومنه** $P \neq R$

وليكن لدينا $a, b \in \boldsymbol{R}$ **بحيث** $a.b \in P$ **عندئذ** $(a.b) + P = P$ وبالتالي

$$(a + P).(b + P) = P$$

وبما أن R/P منطقة تكاملية أي لا تحوي قواسم الصفر فإن

$$a + P = P \quad \vee \quad b + P = P$$

عندئذ يكون لدينا $a \in P \quad \vee \quad b \in P$ ومنه فإن المثالي P أولي .

نتيجة : لتكن $R \neq 0$ حلقة عندئذ الشرط اللازم والكافي لكي تكون الحلقة R منطقة تكاملية هو ان يكون المثالي الصفري $\{0\}$ أولياً في R .

تمارين :

١) ليكن $R = Z \times Z$ و $P = Z \times \{0\}$
برهن أن P هو أولي في R .

الحل : ليكن $x, y \in R$ بحيث $y = (c, d)$, $x = (a, b)$ و حسب التعريف

$$x. y = (a, b). (c, d) = (a. c, b. d) \in P$$

$$= (a. c, 0)$$

أي أن $b. d = 0$ ولكن Z منطقة تكاملية أي لا تحوي قواسم الصفر ومنه إما $d = 0$ أو $b = 0$

$$\begin{cases} x \in P & \text{فان} \quad b = 0 \quad \text{اذا كان} \\ y \in P & \text{فان} \quad d = 0 \quad \text{اذا كان} \end{cases}$$ P مثالي أولي

٢) لتكن $(Z_6, +, .)$ حلقة ولتكن $P = \{0,3\}$ برهن أن P مثالي أولي في Z_6 .

الحل : سنثبت أن P مثالي من خلال الجدولين (شرطين تعريف المثالي)

.	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
3	0	3	0	3	0	3

+	0	3
0	0	3
3	3	0

لنثبت الأن أنه اولي حسب **(المبرهنة في أول المحاضرة)** نلاحظ ان $P \neq Z_6$

ولدينا $\forall a, b \in Z_6$ بحيث $a. b \in P$ إما $a. b = 0$ أو $a. b = 3$

اذا كانت $a. b = 0$ فإن $a. b = 0 \; mod - 6$ (علينا ايجاد عددين ناتج ضربهما يحقق باقي القسمة على 6 هو الصفر)

اذا كان $a = 0$ وكان $b \in Z_6$ يتم المطلوب

اذا كان $a = 2$ وكان $b = 3$ يتم المطلوب

اذا كان $a = 3$ وكان $b = 4$ يتم المطلوب

هذا يعني إما $a \in P \quad \vee \quad b \in P$

اذا كانت $a.b = 3$ فإن $a.b = 3\ mod - 6$ (علينا ايجاد عددين ناتج ضربهما يحقق باقي القسمة على 6 هو 3)

اذا كان $a = 1$ وكان $b = 3$ يتم المطلوب

اذا كان $a = 5$ وكان $b = 3$ يتم المطلوب

هذا يعني إما $a \in P \quad \vee \quad b \in P$

وبكلتا الحالتين يكون P مثالي أولي .

٣) لتكن $(Z_8, +, .)$ حلقة ولتكن $P = \{0,4\}$ برهن أن P مثالي أولي في Z_8 .

الحل (وظيفة): سنثبت أن P مثالي من خلال الجدولين (شرطين تعريف المثالي)

·	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	4	0	4	0	4	0	4

+	0	4
0	0	4
4	4	0

لنثبت الأن أنه اولي حسب **(المبرهنة في أول المحاضرة)** نلاحظ ان $P \neq Z_6$

ولدينا $\forall a, b \in Z_8$ بحيث $a.b \in P$ إما $a.b = 0$ أو $a.b = 4$

اذا كانت $a.b = 0$ فإن $a.b = 0\ mod - 8$ (علينا ايجاد عددين ناتج ضربهما يحقق باقي القسمة على 8 هو الصفر)

اذا كان $a = 0$ وكان $b \in Z_8$ يتم المطلوب

اذا كان $a = 2$ وكان $b = 4$ يتم المطلوب

اذا كان $a = 4$ وكان $b = 4$ يتم المطلوب

اذا كان $a = 6$ وكان $b = 4$ يتم المطلوب

هذا يعني إما $a \in P \quad \vee \quad b \in P$

اذا كانت $a.b = 4$ فإن $a.b = 4\ mod - 8$ (علينا ايجاد عددين ناتج ضربهما يحقق باقي القسمة على 8 هو الصفر)

اذا كان $a = 1$ وكان $b = 4$ يتم المطلوب

اذا كان $a = 3$ وكان $b = 4$ يتم المطلوب

اذا كان $a = 5$ وكان $b = 4$ يتم المطلوب

اذا كان $a = 7$ وكان $b = 4$ يتم المطلوب

هذا يعني إما $a \in P \quad \vee \quad b \in P$

وبكلتا الحالتين يكون P مثالي أولي .

٤) لتكن $(R, +, .)$ حلقة تبديلية واذا كانت I مثالية أولية في R واذا كانت I_1, I_2 مثاليات في الحلقة R بحيث $I_1.I_2 \subseteq I$ بين أن احدى المثاليين I_1, I_2 محتواة في I .

الحل : لنفرض جدلاً عكس ذلك وهذا يعني يمكننا ايجاد عنصرين x, y من I_1, I_2 بحيث $x \in I_1 \quad , \quad y \in I_2$ (الفرض الجدلي يعني ان $x \notin I \quad , \quad y \notin I$)

$$\Longrightarrow x.y \in I_1.I_2 \subseteq I \Longrightarrow x.y \in I$$

وبما أن I مثالية أولية في R فإنه اما $y \in I \quad \vee \quad x \in I$ وهذا غير ممكن وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ

اذاً احدى المثاليتين I_1, I_2 محتواة في I على الأقل .

٥) ليكن I مثالية في الحلقة $(R, +, .)$ بحيث $I \neq R$ أثبت أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون المثالية I أولية في الحلقة $(R/I, +, .)$ هو ألا تحوي قواسم الصفر .

الحل : كفاية الشرط : لنفرض أن I أولية في الحلقة $(R/I, +, .)$ و لنبرهن أن الحلقة $(R/I, +, .)$ لا تحوي قواسم الصفر .

لنفرض جدلاً أن R/I تحوي قواسم الصفر وبالتالي يوجد عنصرين x, y من R بحيث يكون

$$x + I \neq I \quad , \quad y + I \neq I$$

ونعلم أن $(x + I).(y + I) = x.y + I = I$

اي أن $x.y \in I$

وبما أن I أولية في الحلقة $(R/I, +, .)$ فرضاً فإنه اما $y \in I \quad \vee \quad x \in I$ وهذا يؤدي الى أن

$$x + I = I \quad \vee \quad y + I = I$$

وهذا مخالف لأن

$$x + I \neq I \quad , \quad y + I \neq I$$

وبالتالي الحلقة $(R/I, +, .)$ لا تحوي قواسم الصفر .

لزوم الشرط : لنفرض أن الحلقة $(R/I,+,.)$ لا تحوي قواسم الصفر و لنبرهن أن I أولية في الحلقة $(R/I,+,.)$

بما أن الحلقة لا تحوي قواسم الصفر فأنه يوجد عنصرين x,y من R بحيث يكون $x.y\in I$

ونعلم أن $x.y+I=(x+I).(y+I)=I$

و هذا يؤدي الى أن

$$x+I=I \quad \vee \quad y+I=I$$

وبالتالي فإنه اما $x\in I \quad \vee \quad y\in I$ اذاً I **مثالية أولية .**

انتهت المحاضرة

تصحيح في المحاضرة الرابعة

تمرين : لنعرف على مجموع أزواج الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}^2$ العمليتين $(+),(\times)$ الداخليتين بالشكل التالي :

$$(x,y)+(x_1,y_1)=(x+x_1,y+y_1)$$
$$(x,y)\times(x_1,y_1)=(xx_1,yy_1+xy_1+yx_1)$$

المطلوب :

١- أثبت أن $(\mathbb{Z}^2,+,\times)$ حلقة .
٢- أثبت أن $(\mathbb{Z}^2,+,\times)$ حلقة تامة .

الطلب الثاني وجدنا انها تامة والصواب انها غير تامة لأنها تحوي قواسم الصفر واليكم التصحيح

ليكن $(x,y)\times(x_1,y_1)=(xx_1,yy_1+xy_1+yx_1)=\mathbf{(0,0)}$

اي $xx_1=\mathbf{0}\ ,\ yy_1+xy_1+yx_1=0\ ,$

نستنتج أنه اذا كان $x_1=-y_1$ وأن $x=0$ ولنأخذ y_1,y أي عددين صحيحين فإن العلاقة السابقة تبقى صحيحة ومنه فهي تحوي قواسم الصفر ولنأخذ مثلاً على ذلك

$$(0,7)(5,-5)=(0,-35+35)=(0,0)$$

إعداد: لبنى الطون – احمد ابو التوت