فريق سيرياتك

الصف ٢٠١٧/٤/٢٤ ... الحلمد ٢٠١٣/٤ ☺

(١)

3 — تحليل المتجهات ومبادئ الهندسة التفاضلية ٢٤ —

المستقيم المماس لمنحني:

ليكن:

$$C\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

• نسمي المستقيم المماس في نقطة $M \in C$ والمماس لهذا المنحني عند تلك النقطة بالمستقيم المماس.

نفرض:

$$\vec{M'}(x', y', z') \Leftarrow \vec{M}(x, y, z)$$

• نعلم أن المشتق $\vec{M'}(x', y', z')$ يوازي المماس وإذا كانت $P(X, Y, Z)$ نقطة من المستقيم المماس

$$\overrightarrow{MP} \parallel \vec{M'} \Leftarrow \forall t \;,\; \vec{M'} \neq 0$$

$$\overrightarrow{MP} \wedge \vec{M'} = \vec{0}$$

☺ عندئذٍ معادلة المستقيم المماس تعطى بالمحددة

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}$$

معادلة المستقيم المماس

إذا وُجد $x' = 0$

$$\begin{cases} X - x = 0 \\ \dfrac{Y-y}{y'} = \dfrac{Z-z}{z'} \end{cases}$$

وإذا كانت $\vec{M'} = 0$ لأن النقطة t_0

$$\frac{X-x}{x''} = \frac{Y-y}{y''} = \frac{Z-z}{z''}$$

المستوي الناظم للمنحني

نسمي المستوي العمودي على المستقيم المماس عند نقطة التماس بالمستوي الناظم

نفرض $P(X,Y,Z)$ نقطة من المستوي

وكانت $\vec{M'} \neq 0$ فإن معادلة المستوي

أي $\vec{M'} \cdot \vec{MP} = 0$

$$(X - x)\, x' + (Y - y)\, y' + (Z - z)\, z' = 0$$

المستوي الملاصق:

نسمي المستوي الذي يحوي المستقيم المماس ومستقيم المستوي الأساسي بالمستوي الملاصق

إن المستوي الملاصق يوازي كلا من $\vec{T}$ و $\vec{N}$ إذا كانت P نقطة منه فإن معادلته $(\vec{MP}, \vec{T}, \vec{N}) = 0$ أي

$$\Longleftrightarrow (\vec{MP}, \vec{M'}, \vec{M''}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

مثال:

$$C: \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

أوجد معادلتي المستوي الملاصق، المستوي الناظم ومستقيم المماس عند $M_0(1,1)$ وعند $t_0 = 1$

معادلة مستقيم المماس

$$\frac{X - x_0}{x'_0} = \frac{Y - y_0}{y'_0} = \frac{Z - z_0}{z'_0}$$

$$M_0 \begin{cases} x_0 = (1)^2 = 1 \\ y_0 = (1)^3 = 1 \end{cases}$$

$x' = 2t \Rightarrow x'_0 = 2$

$y' = 3t^2 \Rightarrow y'_0 = 3$

$x'' = 2 \Rightarrow x''_0 = 2$

$y'' = 6t \Rightarrow y''_0 = 6$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3}$$

المستوي الناظم

$(x - x_0) x'_0 + (y - y_0) y'_0 = 0$

$2(x-1) + 3(y-1) = 0$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

دسايتر نصف قطر التقوس ρ و الالتفاف t شعاعيا

نصف قطر التقوس:

$$\rho = \frac{(M'^2)^{\frac{3}{2}}}{|\vec{M'} \wedge \vec{M''}|}$$

نصف قطر الالتفاف

$$t = \frac{(\vec{M'} \wedge \vec{M''})}{(\vec{M}, \vec{M'}, \vec{M''})}$$

JiHân

بأن:

$M' = x', y', z'$

$$\vec{M'} \wedge \vec{M''} = \begin{vmatrix} y' z'' - z' y'' \\ z' x'' - x' z'' \\ x' y'' - y' x'' \end{vmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow A \\ \Rightarrow B \\ \Rightarrow C \end{matrix}$$

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Scanned by CamScanner

تأتي الأسئلة
على نمط..
١) اوجد طول المنحنى
٢) $\vec{T}$, $\vec{N}$
٣) مركز التقوس
٤) المماس / الناظم
٥) $\vec{OK} = \vec{OM} + \rho\vec{N}$

الخلاصة:

$$S = \int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,.dt$$

$$dS = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

$$\vec{T} = \begin{cases} \alpha = \dfrac{dx}{ds} \\ \beta = \dfrac{dy}{ds} \\ \gamma = \dfrac{dz}{ds} \end{cases} \qquad \vec{N} = \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{d\alpha}{da} \\ \beta_1 = \dfrac{d\beta}{a} \\ \gamma_1 = \dfrac{d\gamma}{a} \end{cases}$$

$$da = \sqrt{(d\alpha)^2 + (d\beta)^2 + (d\gamma)^2}$$

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{\vec{B}}{t} - \frac{\vec{T}}{\rho}$$

$$\frac{d\vec{T}}{\Delta s} = \frac{\vec{N}}{\rho}$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\frac{\vec{N}}{t}$$

٢) قانون مركز التقوس

$$\vec{OK} = \vec{OM} + \rho\vec{N}$$

اكتب معادلات المماس والمستوي الناظم والمستوي اللاصق للمنحنى

$x = a\sin t.\cos t$ (1

$y = a\sin^2 t$

$z = a\cos t$

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ حيث a ثابت في نقطة t_0

١) نفرض

$$x = t^2$$
$$y = t^3$$
$$z = \frac{9}{16} t^4$$

$$\vec{T} , \vec{N} , \vec{B}$$

احسب ρ عند $t=1$

معادلة المماس والمستوي الملاصق عند $t=1$

٢) اكتب المعادلة الشعاعية

$$\vec{M}(t) = e^t \cos t \, \vec{j} + e^t \sin t \, \vec{j} + e^t \vec{k}$$

بدلالة الوسيط s

٤) احسب نصف قطر التقوس

$$x = a\cos^2 t$$
$$y = a\sin^2 t$$

عند $t = \frac{\pi}{4}$

تحقق ان المنحني

$$\vec{M}(t) = 2t\,\vec{i} + t^2\vec{j} + \ln t\,\vec{k}$$

يمر بالنقطتين $A(2,1,0)$
$B(4,4,\ln 2)$

ثم احسب طول $\overrightarrow{AB}$

الاحداثيات المنحنية (السطوح)

نفرض S سطح معينا بالمعادلات المتجهية التالية:

$$\vec{OM}(u,v) = x(u,v)\,\vec{i} + y(u,v)\,\vec{j} + z(u,v)\,\vec{k}$$

$$\vec{OM} = \vec{OM}(u,v)$$

$$\vec{M} = \vec{M}(u,v)$$

S سطح تابع للوسيطين v , u

نفرض $v = V$ قيمة ثابتة

عندئذ يكون التابع الشعاعي لوسيط u (متحول)

فترسم M منحني على سطح نرمز له بـ C_u

اذا كانت $u = u_0$ قيمة ثابتة يكون V متحول فترسم M منحني على السطح نرمز له بـ C_v

تسمى احداثيات C_u , C_v بالاحداثيات المنحنية

مثال:

السطح الكروي

$$S = \begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi \\ y = a\sin\theta\sin\varphi \\ z = a\cos\theta \end{cases}$$

نثبت φ ينتج C_θ خطوط العرض

" θ ينتج C_φ خطوط الطول

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ معادلة السطح الكروي

المستوي المماس للسطح

نفرض S سطح $\vec{M} = \vec{M}(u,v)$

عندئذ:

$\vec{M'_u}$ مماس للمنحني C_u

$\vec{M'_v}$ " " C_v

عند النقطة $M(u,v)$ من السطح ولنفرض $v = v(t)$, $u = u(t)$

$$\vec{M'_t} = \vec{M'_u}\cdot u'_t + \vec{M'_v}\cdot v'_t$$

فتكون معادلة المستوي المماس

$$(\vec{MP}, \vec{M'_u}, \vec{M'_v}) = 0$$

وللكي $\vec{n} = \vec{M}'_u \wedge \vec{M}'_v$

فتكون المعادلة

$$\vec{MP} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{n}(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0$$

♥ المستقيم الناظم لسطح:

نعرف المستقيم الناظم لسطح S بأنه المستقيم العمودي على المستوي المماس

$$\vec{S} \cdot \vec{M}(u, v) = 0$$

المعادلة $\vec{MP} \wedge \vec{n} = \vec{0}$

مثال:

$$\vec{M}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (u^2 - v^2)\vec{k}$$

عند النقطة $M_0(1, 1)$

اوجد معادلة المستوي المماس، المستقيم الناظم

$$\vec{M}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (u^2 - v^2)\vec{k}$$

$$\vec{M}'_u(u, v) = \vec{i} + 2u\vec{k} = M'_u(1, 0, 2)$$

$$\vec{M}'_v = \vec{j} - 2v\vec{k} = M'_v(0, 1, -2)$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2, +2, 1)$$

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0$$

$$-2(x - 1) + 2(y - 1) + z = 0$$

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z}{1}$$

اعداد: ميان عطفة ♥

فريق اسبريا ماث.