المحاضرة السابعة: 5/4/2017

حل معادلة تفاضلية من مرتبة ثانية عند نقطة شاذة نظامية:

$N(x)\, y'' + p(x)\, y' + Q(x)\, y = 0$ يوجد عناصر مشتركة.

النقاط الشاذة للمعادلة تحقق: $\boxed{N(x) = 0}$ تعدم y''

بفرض x_0 نقطة شاذة، نضرب المعادلة $\frac{(x-x_0)^2}{N(x)}$

$$(x-x_0)^2 y'' + (x-x_0)\, u(x)\, y' + v(x)\, y = 0$$

* $u(x) = \dfrac{(x-x_0) \cdot p(x)}{N(x)}$

* $v(x) = \dfrac{(x-x_0)^2 \cdot Q(x)}{N(x)}$

نقول إنّ $x = x_0$ نقطة شاذة نظاميّة إذا كانت:

$\lim_{x \to x_0} u(x)$ ، $\lim_{x \to x_0} v(x)$ موجودة.

/ /

مثال: لتكن لدينا المعادلة: $\underbrace{x^2(x-2)^2}_{N(x)} y'' + \underbrace{(x-2)}_{P(x)} y' + \underbrace{3x^2}_{Q(x)} y = 0$

إنّ النقاط الشاذة هي $x_0 = 0$, $x_0 = 2$

$$u(x) = \frac{(x-x_0)(x-2)}{x^2(x-2)^2} \quad , \quad v(x) = \frac{(x-x_0)^2 \cdot (3x^2)}{x^2(x-2)^2}$$

$x_0 = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} u(x) = \dfrac{x(x-2)}{x^2(x-2)^2} = \dfrac{1}{x(x-2)} \\ v(x) = \dfrac{x^2(3x^2)}{x^2(x-2)^2} = \dfrac{3x^2}{(x-2)^2} \end{array} \right\}$ نقطة شاذة غير نظاميّة.

$x_0 = 2$ $\left\{ \begin{array}{l} u(x) = \dfrac{(x-2)^2 \cdot (3x^2)}{x^2 \cdot (x-2)^2} = \dfrac{1}{x^2} \\ v(x) = \dfrac{(x-2)^2 \cdot (3x^2)}{x^2 \cdot (x-2)^2} = 3 \end{array} \right\}$ نقطة شاذة نظاميّة.

حالة خاصّة من المعادلات التفاضليّة الخطّيّة من المرتبة الثانية:

معادلة أولر: أي لدينا ثابتين c_1, c_2.

$L[y] = x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$ (مؤثر تفاضلي)

إنّ $x_0 = 0$ نقطة شاذة نظاميّة.

والحل العام يكتب بالشكل: $y = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$

فرضيّة أولى: نفرض أنّ $y = x^r$ حيثُ r عدد حقيقي.

$y = x^r \quad , \quad y' = r \cdot x^{r-1} \quad , \quad y'' = r(r-1) \cdot x^{r-2}$

نعوض فنجد:

$* \; L[x^r] = r(r-1)x^r + a r x^r + \beta x^r = 0$

أو $L[x^r] = x^r[r(r-1) + ar + \beta] = 0$

أو $L[x^r] = x^r[\underline{r^2 + (a-1)r + \beta}] = 0$

من الشكل : $Ar^2 + Br + c$ ($\Delta < 0$, $\Delta = 0$, $\Delta > 0$)

$x^r(r^2 + (a-1)r + \beta) = 0$, $\boxed{x > 0} \Rightarrow r^2 + (a-1)r + \beta = 0$

$\Rightarrow r = \dfrac{-(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4\beta}}{2} \quad \Rightarrow F(r) = r^2 + (a-1)r + \beta = (r-r_1)(r-r_2)$

$A = 1$, $B = a-1$, $c = \beta$

/ /

الحالة الأولى:

إذا كان $F(r)$ لديه جذران حقيقيان مختلفان $\boxed{r_1 \neq r_2}$ عندئذٍ لدينا حلان:
$y_1(x) = x^{r_1}$ ، $y_2(x) = x^{r_2}$ هي حلول خاصة لمعادلة أولى.

لاحظ أنّ:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1 x^{r_1-1} & r_2 x^{r_2-1} \end{vmatrix} = r_2 . x^{r_1+r_2-1} - r_1 x^{r_1+r_2-1}$$
$$= (r_2 - r_1) x^{r_1+r_2-1} \neq 0 \quad \forall x$$

عدد رونسكي $\neq 0$ ⇐ استقلال

وبالتالي الحل العام هو:

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} \quad : x > 0$$

مثال:

لتكن لدينا المعادلة: $2x^2 y'' + 3xy' - y = 0 \quad , x > 0$

لنفرض أنّ: $y = x^r$ فنحصل على:

$$y = x^r \quad , \quad y' = r.x^{r-1} \quad , \quad y'' = r(r-1)x^{r-2}$$

and عوضنا $2r(r-1)x^r + 3rx^r - x^r = 0 \Rightarrow x^r[2r(r-1) + 3r - 1] = 0$

$$\Rightarrow x^r[2r^2 + r - 1] = 0 \Rightarrow x^r(2r-1)(r+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1/2 \\ r_2 = -1 \end{cases}$$

وبالتالي الحل العام هو: $y(x) = c_1 x^{1/2} + c_2 x^{-1} \quad , \quad x > 0$

الحالة الثانية:

إذا كان $F(r)$ لديه جذران حقيقيان متساويان $\boxed{r_1 = r_2}$ عندئذٍ يوجد لدينا حل
$y_1(x) = x^{r_1}$ و

$$L[x^r] = x^r[r^2 + (\alpha - 1)r + \beta] = x^r(r - r_1)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial r} L[x^r] = \frac{\partial}{\partial r}(r - r_1)^2$$

$$L[x^r . \ln x] = x^r . \ln x \, (r - r_1)^2 + 2(r - r_1)x^r$$

$$\Rightarrow y_2(x) = x^r . \ln x \quad , \quad x > 0$$

في حالة تساوي الجذران : $r_1 = r_2$ لدينا حلان :

$$y_1(x) = x^{r_1} \quad , \quad y_2(x) = x^{r_1} \cdot \ln x$$

والآن :

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{r_1} & x^{r_1} \cdot \ln x \\ r_1 x^{r_1 - 1} & x^{r_1 - 1}(r_1 \ln x + 1) \end{vmatrix} = x^{2r_1 - 1} \neq 0 \quad \forall x > 0$$

فهما مستقلان.

والحل العام هو :

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} \cdot \ln x = (c_1 + c_2 \ln x) x^{r_1} , \quad x > 0$$

مثال : لتكن لدينا المعادلة :

$$x^2 y'' + 5x y' + 4y = 0 \quad , \quad x > 0$$

الحل :

$$y = x^r \quad , \quad y' = r x^{r-1} \quad , \quad y'' = r(r-1) x^{r-2}$$

and

$$r(r-1)x^r + 5r x^r + 4x^r = 0$$

$$x^r [r(r-1) + 5r + 4] = 0$$

$$x^r [r^2 + 4r + 4] = 0$$

$$x^r (r+2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad r_1 = r_2 = -2$$

والحل العام هو :

$$y(x) = (c_1 + c_2 \ln x) x^{-2} \quad , \quad x > 0 .$$

انتهت المحاضرة السابقة.