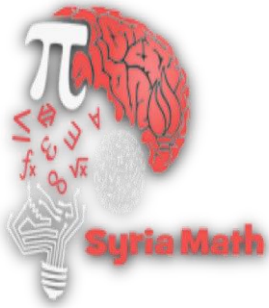


◄ الأستاذ: أحمد هايل

عملي

◄المحاضرة الأولى عنوان المحاضرة :الفضاءات المترية

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

دوال مسافة مختلفة و إثبات أن دوالاً ما هي دوال مسافة

التمرين الأول : ليكن $X = \mathbb{R}^2$ أثبت أن الدالة $d: X \times X \to \mathbb{R}$

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

حيث $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ ، دالة مسافة على X.

الحل : حتى تكون دالة مسافة يجب تحقق الشروط الأربعة الواردة في تعريف دالة المسافة :

١- **الشرط الأول**: $\forall x, y \in X \; ; d(x,y) \geq 0$ و هو محقق وضوحاً

٢- **الشرط الثاني** : $\forall x, y \in X \; ; d(x,y) = d(y,x)$ و لنتحقق من ذلك

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_1)^2} = d(y,x)$$

٣- **الشرط الثالث** : $\forall x, y \in X \; ; d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ و لنتحقق من ذلك :

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 - y_1 = 0 \;\&\; x_2 - y_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = y_1 \;\&\; x_2 = y_2 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \Leftrightarrow x = y$$

(مجموع مقادير غير سالبة يكون معدوماً عندما و فقط عندما يكون كل منها معدوم)

٤- **الشرط الرابع** : **متراجحة المثلث** : ليكن $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2)$

و نريد اثبات أن $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ أي لنثبت أن :

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2}$$

نضع $c_1 = x_1 - z_1$, $c_2 = x_2 - z_2$ و أيضاً :

$$a_1 = x_1 - y_1 \;\; , \;\; a_2 = x_2 - y_2 \;\; , \;\; b_1 = y_1 - z_1 \;\; , \;\; b_2 = y_2 - z_2$$

Syria Math Team

بجمع b_1 و a_1 نجد أن $\boxed{c_1 = a_1 + b_1}$ و أيضاً بجمع b_2 و a_2 نجد أن $\boxed{c_2 = a_2 + b_2}$

فيصبح لدينا: $d(y,z) = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, $d(x,y) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ و أيضاً :

$$d(x,z) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \Rightarrow d^2(x,z) = c_1^2 + c_2^2$$

و حسب ما وجدنا سابقاً :

$$\begin{aligned} d^2(x,z) &= c_1^2 + c_2^2 = (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 \\ &= a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2) + 2(a_1b_1 + a_2b_2) + (b_1^2 + b_2^2) \\ &= d^2(x,y) + 2(a_1b_1 + a_2b_2) + d^2(y,z) \\ &\underset{t \le |t|}{\le} d^2(x,y) + 2|a_1b_1 + a_2b_2| + d^2(y,z) \dots\dots (*) \end{aligned}$$

و لكن لنلاحظ ما يلي :

$$\begin{aligned} |a_1b_1 + a_2b_2|^2 &= |a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2| \\ &\underset{|u+v+w| \le |u|+|v|+|w|}{\le} |a_1^2b_1^2| + 2|a_1b_2a_2b_1| + |a_2^2b_2^2| \dots (**) \end{aligned}$$

من جهة أخرى واضح أن $(|a_1b_2| - |a_2b_1|)^2 \ge 0$ و هذا يكافئ قولنا أن :

$$\begin{aligned} 0 &\le |a_1b_2|^2 - 2|a_1b_2||a_2b_1| + |a_2b_1|^2 \\ 2|a_1b_2||a_2b_1| &\le |a_1b_1|^2 + |a_2b_2|^2 \end{aligned}$$

سنستفيد من هذ المتراجحة (**):

$$\begin{aligned} |a_1b_1 + a_2b_2|^2 &\le |a_1^2b_1^2| + 2|a_1b_1a_2b_2| + |a_2^2b_2^2| \\ &\le a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 = (a_1^2 + a_2^2)b_1^2 + (a_1^2 + a_2^2)b_2^2 \\ &= \underbrace{(a_1^2 + a_2^2)}_{d^2(x,y)} \underbrace{(b_1^2 + b_2^2)}_{d^2(y,z)} \end{aligned}$$

$$\underset{\text{بجذر الطرفين}}{\Rightarrow} |a_1b_1 + a_2b_2| \le d(x,y).d(y,z)$$

نعوض في (*) :

Syria Math Team

$$d^2(x,z) \le d^2(x,y) + 2d(x,y).d(y,z) + d^2(y,z) = \big(d(x,y) + d(y,z)\big)^2$$

بجذر الطرفين غير السالبين :

$$\boxed{d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)}$$

التمرين الثاني :

لنعرف على $\mathbb{R}^2$ الدالة d بالشكل $d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ حيث

$$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

و المطلوب إثبات أنها دالة مسافة على $\mathbb{R}^2$

الحل : حتى تكون دالة مسافة يجب أن تحقق الشروط الأربعة الواردة في تعريف دالة المسافة :

$$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2 ;$$

الشرط الأول :(غير سالب)

$$d(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \ge 0$$

و ذلك حسب تعريف دالة القيمة المطلقة

الشرط الثاني :

$$d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0$$

و لكن إذا كان مجموع مقادير غير سالبة هو الصفر فإن كل من هذه المقادير معدوم أي :

$$\begin{cases} |x_1 - x_2| = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \\ |y_1 - y_2| = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2 \end{cases} \Longrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Longrightarrow z_1 = z_2$$

الشرط الثالث :(التناظر)

$$d(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = d(z_2, z_1)$$

الشرط الرابع:(متراجحة المثلث) :

Syria Math Team

$$d(z_1,z_3)=|x_1-x_3|+|y_1-y_3|$$
$$=|x_1-\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_2}-x_3|+|y_1-\boldsymbol{y_2}+\boldsymbol{y_2}-y_3|$$
$$\overset{\text{خواص قيمة مطلقة}}{\leq} |x_1-x_2|+|x_2-x_3|+|y_1-y_2|+|y_2-y_3|$$

$\boldsymbol{d(z_1,z_2)}$ $\boldsymbol{d(z_2,z_3)}$

و هذا يبين أن : $d(z_1,z_3)\leq d(z_1,z_2)+d(z_2,z_3)$

من تحقق الشروط الأربعة نجد أن d تابع مسافة على $\mathbb{R}^2$

التمرين الثالث : ليكن لدينا الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ بالشكل

$$d(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$$

حيث $x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)$

هي دالة مسافة و قد أثبتنا ذلك في محاضرات النظري ^_^.

التمرين الرابع : لتكن d مسافة على مجموعة $X\neq\emptyset$ ، برهن أن كلاً من الدوال :

$$d_1(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$
$$d_2(x,y)=\min\{1,d(x,y)\}$$
$$d_3(x,y)=k\,d(x,y)\quad :k\in\mathbb{R}^+$$

الحل : أياً كانت $x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)\ ,\ z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2$

- **فمن أجل $\mathbf{d_1}$:**

الشرط الأول :(غير سالب) لكون d تابع مسافة فإن $d(x,y)\geq 0$ و بالتالي ينتج :

Syria Math Team

$$d_1(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\geq 0$$

الشرط الثاني :

$$d_1(x,y)=0\Leftrightarrow\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=0\Leftrightarrow d(x,y)=0\underbrace{\Leftrightarrow}_{d\text{ تابع مسافة}}x=y$$

الشرط الثالث (التناظر) : محقق وضوحاً

الشرط الرابع (متراجحة المثلث) : لدينا

$$d_1(x,y)+d_1(y,z)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}+\frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}$$
$$\geq\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)}+\frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}$$

(كَبُرَ المقام فصغر المقدار) ، الآن و قد أصبح لدينا كسران بمقام موحد ، المتراجحة التالية:

$$d_1(x,y)+d_1(y,z)\geq\frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}\overset{???}{\geq}\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}=d_1(x,z)..(*)$$

لنتحقق من صحة المتراجحة الأخيرة ، سنضرب الطرفين بالوسطين :

$$d(x,y)+d(y,z)+\boldsymbol{d(x,z)d(x,y)}+\boldsymbol{d(y,z)d(x,z)}$$
$$\geq d(x,z)+\boldsymbol{d(x,y)d(x,z)}+\boldsymbol{d(y,z)d(x,z)}$$

بالاختصار نجد :

$$d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$$

و الأخيرة صحيحة لأنها متراجحة المثلث التي تحققها دالة المسافة d و بالتالي المتراجحة $(*)$ محققة و يتم المطلوب.

- **من أجل المسافة d_2 :**

الشرط الأول (غير سالب) : القيمة الدنيا لمقادير غير سالبة هو مقدار غير سالب فيكون :

Syria Math Team

$$d_2(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} \geq 0$$

الشرط الثاني :

$$d_2(x,y) = 0 \Leftrightarrow \min\{1, d(x,y)\} = 0$$

أي أن أصغر العددين 1و d(x,y) يساوي إلى الصفر... و لكن الـ 1 لن يساوي الصفر حتماً بالتالي لابد ن يكون $d(x,y) = 0$ و لما كانت d دالة مسافة فيتحقق أن $x = y$ إذاً :

$$d_2(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

الشرط الثالث (التناظر) :

$$d_2(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} = \min\{1, d(y,x)\} = d_2(y,x)$$

الشرط الرابع (متراجحة المثلث) :

لدينا $d_2(x,y)$ هي التعريف أصغر العددين $d(x,y)$ & 1 و بالتالي :

$$d_2(x,y) \leq d(x,y) \quad , \quad d_2(x,y) \leq 1$$

و هنا لدينا الحالتين :

◄**الحالة الأولى :** إما $1 \leq d(x,y)$ أو $1 \leq d(y,z)$ في هذه الحالة لدينا :

$$d_2(x,y) + d_2(y,z) \geq 1 \geq d_2(x,z)$$

◄**الحالة الثانية :** $d(y,z) < 1 \quad , \quad d(x,y) < 1$ و منه يكون :

$$d_2(x,y) + d_2(y,z) = d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \geq d_2(x,z)$$

و منه الدالة d_2 مسافة على X.

- **من أجل المسافة d_3 :** واضح (ضرب عدد موجب بدالة مسافة لا يغير من تحقيقها لخواص المسافة)

بعدما تعرفنا على أمثلة و دوال مسافة مختلفة ، لنلاحظ ما يلي :

Syria Math Team

١- لتكن d دالة مسافة على $X \neq \emptyset$ عندئذٍ كل دالة من الشكل $d_\alpha = \frac{d}{\alpha+d}$ ستكون دالة مسافة على X و ذلك لكل $\alpha > 0$

و يمكن إثبات ذلك كما يلي :

وجدنا أن $d_1 = \frac{d}{1+d}$ هي دالة مسافة و وجدنا أيضاً أن kd هي دالة مسافة أيضاً ، لنستبدل في d_1 كل d بـ $\frac{1}{\alpha}d$:

$$d_1 = \frac{\frac{1}{\alpha}d}{1+\frac{1}{\alpha}d} = \frac{\frac{1}{\alpha}d}{\frac{\alpha+d}{\alpha}} = \frac{d}{\alpha+d}$$

هي دالة مسافة .

٢- كذلك يكون $\alpha > 0$: $d_\alpha = \min\{\alpha, d\}$ و يمكن اثباتها بشكل معمم أو بأن نستبدل كل d بـ $\frac{1}{\alpha}d$ مع ملاحظة أن :

$$\alpha \min\left\{1, \frac{1}{\alpha}d\right\} = \min\{\alpha, d\}$$

و إليكم التمارين كوظائف يطلب حلها :

١- لتكن $X = \mathbb{Z}$ أثبت أن : $d: X \times X \to \mathbb{R}$:

$$d(x,y) = \begin{cases} \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| & : x \neq 0 \, , y \neq 0 \\ \left|\frac{1}{y}\right| & : x = 0 \quad , \quad y \neq 0 \\ \left|\frac{1}{x}\right| & : x \neq 0 \quad , \quad y = 0 \\ 0 & : \quad x = y = 0 \end{cases}$$

٢- أثبت أنّ: $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ مسافة على $\mathbb{R}$

٣- هل $d(x,y) = |\cos(x-y)|$ مسافة على $\mathbb{R}$

٤- ارسم الكرة المفتوحة $N(0,1)$ في الفضاءات $(\mathbb{R}^2, d)$ حيث :

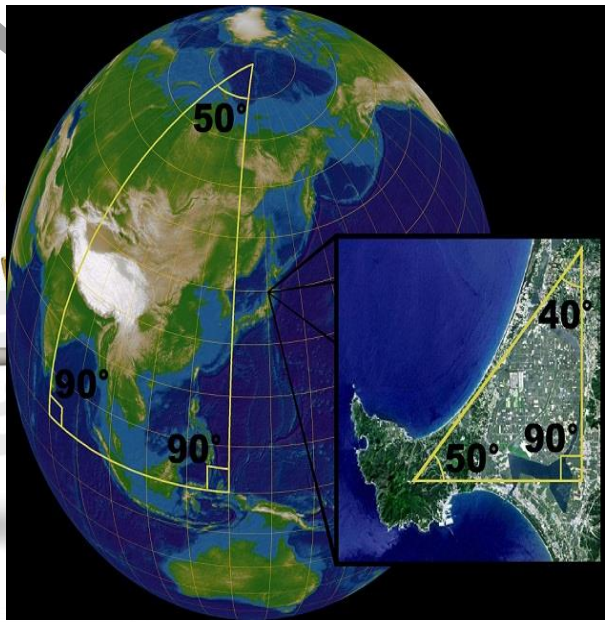
$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$
$$d(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$$
$$d(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$$

Syria Math Team

ثم أثبت أن المسافات السابقة متكافئة .

صفحتنا على فيسبوك: IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/	مجموعة السنة الثانية : Improve Our Mathematics	مجموعة السنة الأولى: طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق ٢٠١٧

إعداد: عبد الرحمن البحش – شهناز طاطيش – نذير تيناوي



أي نعم ^_^ في مثلث بزاويتين قائمتين ..

في #الهندسة_الكروية :

في فضاء منحنٍ ، مجموع زوايا أي مثلث هي دوماً أكبر من 180 درجة .

على سطح كرة لا يوجد خطوط مستقيمة ، فجميع المستقيمات تنحني مع الفضاء (سطح الكرة)

Syria Math Team