13-4-2017

نظري

◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة الحادية عشر

◄ عنوان المحاضرة: الطاقة الحركية والحركة النسبية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- الطاقة الحركية والحركة النسبية.

2-الانتقالات والعمل الافتراضي.

3- معادلات لاغرانج.

الطاقة الحركية والحركة النسبية

انطلاقاً من معادلة التحريك الاساسية $m\vec{\Gamma} = \vec{F} + \vec{J_e} + \vec{J_c}$

في الحركة النسبية لا تختلف عن معادلة التحريك في الحالة العامة $m\vec{\Gamma} = \vec{F}$

إلا بإضافة الحدين $(\vec{J_e}, \vec{J_c})$

مثلاً إذا أخذنا كمية الحركة $;(v = v_a)$ $\quad d(mv) = F.dt$

أما الحركة النسبية $;(v = v_r)$ $\quad d(mv) = F.dt + J_e.dt + J_c.dt$

كذلك في الطاقة الحركية $;(v = v_a)$ $\quad d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F.dr$

وفي حالة الحركة النسبية $d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F.dr + J_e.dr + J_c.dr$

لدينا : $J_c.dr = (-m\Gamma_c)dr = -2m(\omega \times v_r)dr = -2m\left(\omega \times \frac{dr}{dt}\right)dr = 0$

لأن $(\frac{dr}{dt}, dr)$ شعاعان متوازيان

وأصبحت لدينا نظرية الطاقة الحركية $\boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}.dr + \vec{J_e}.dr}$

وهي عبارة عن الطاقة الحركية للحركة النسبية.

وهذا يعني أن العمل الجزئي في الحركة النسبية يساوي العمل الجزئي للقوة المؤثرة على النقطة المادية بالإضافة للعمل الجزئي لقوة عطالتها الجرية.

الانتقال الافتراضي

لنعطي باللحظة t للنقطة المادية M انتقالاً عنصرياً (يحدث دون تغير في الزمن) نرمز له بـ (δr) تمييزاً عن الانتقال الحقيقي (dr)

على أن يحدث هذا انتقالاً عنصرياً (δr) بثبات الزمن ، ونسمي الانتقال δ_r الذي مركباته $(\delta_x, \delta_y, \delta_z)$ انتقالاً افتراضياً ولنبحث عن العلاقة التي تحققها الانتقالات الافتراضية

عندما يكون الارتباط هندسياً $\boxed{f(x,y,z,t) = 0 \ldots.(1)}$ وهي معادلة تمثل سطح هندسي في الفراغ.

وعندما نعطي النقطة M انتقالاً (δr) فإن احداثياتها $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ وهذا الانتقال يحافظ على الارتباط الهندسي الذي يحقق العلاقة $f(x,y,z,t) = 0$

وبالتالي $\boxed{f\left(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t\right) = 0 \ldots..(2)}$

ومنه $f(x,y,z,t) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\delta_z = 0$ حيث $(\delta t = 0)$ لأن الزمن ثابت)

هذا المقدار هو عبارة عن تدرج التابع $\boxed{grad\ f\delta_r = 0 \ldots (3)}$ أي أن δ_r متعامد مع الناظم على السطح هذه عبارة عن الانتقال الافتراضي للنقطة المادية على السطح وبالتالي عندما يكون الارتباط محرراً بحيث تنفك النقطة المادية عن السطح (لا يوجد ارتباط) وتكون النقطة طليقة ونتيجة لهذا الانتقال فإن العلاقة (2) تكون غير محققة .

العمل الافتراضي

يعرف العمل الافتراضي للنقطة المادية M على الشكل التالي :

$$\delta A = F.\delta_r = F_x.\delta_x + F_y.\delta_y + F_z.\delta_z$$

الارتباط المثالي :

هو الارتباط الذي يكون فيه العمل الافتراضي لرّد الفعل معدوم (يساوي الصفر) وبالتالي إذا كان لدينا نقطة مادية ملازمة لسطح أملس (ناعم) فإن رد الفعل يكون عامودياً ويكون الانتقال معدوماً على السطح وبالتالي يصبح لدينا عمل رد الفعل $R.dr = 0$ وبالتالي يكون العمل يساوي الصفر$(\delta A = 0)$

ملاحظة : السطح الأملس يكون رد الفعل ناظمياً على السطح وبتالي يكون معدوم.

وبالتالي إذا وجد احتكاك مع هذا السطح ((غير أملس)) يكون لرّد الفعل مركبة مماسية عملها غير معدوم ((لا يساوي الصفر)) وهكذا نقول أن السطح الأملس ((ناعم – مثقول)) يمثل ارتباطاً مثالياً

معادلة دالا امبير لاغرانج

لتكن M نقطة مادية كتلتها m تؤثر فيها قوة فعالة $\vec{F}$ وقوى الربط محصلتها $\vec{R}$ ولنكتب مبدأ دالا امبير لهذه النقطة $\vec{F} - m\vec{\Gamma} + \vec{R} = 0$ نضرب عددياً طرفي هذه العلاقة بـ δ_r فنجد..

$\left(\vec{F} - m\vec{\Gamma} + \vec{R}\right)\delta_r = 0$ وإذا فرضنا أن الارتباط مثالي يكون لدينا $\vec{R}.\delta_r = 0$

وبالتالي تصبح العلاقة $\left(\vec{F} - m\vec{\Gamma}\right)\delta_r = 0$ وهي معادلة دالا امبير لاغرانج.

ويمكن أن تكتب على الشكل التالي بعد الإسقاط ....

$$(F_x - mx'')\delta_x + (F_y - my'')\delta_y + (F_z - mz'')\delta_z = 0$$

هنا لدينا النقطة المادية مقيدة $(\delta_x, \delta_y, \delta_z)$ ليست مستقلة الارتباطات أي أن هذه الارتباطات ترتبط مع بعضها البعض بعلاقة من الشكل :

$\frac{\partial f}{\partial x}\delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta_y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta_z = 0$ لأن أمثالها ليس أصفاراً

في حالة خاصة إذا كانت أمثالها تساوي الصفر يكون الارتباطات مستقلة خطياً ((تكون النقطة المادية طليقة))

$$mx'' = F_x \quad , \quad my'' = F_y \ , mz'' = F_z$$

ومنه نحصل على $m\Gamma = F$ وهو قانون نيوتن الثاني .

من معادلة دالا امبير لاغرانج $\boxed{\left(\vec{F} - m\vec{\Gamma}\right).\vec{\delta_r} = \vec{0}}$

بعض المؤلفين يعتبرون هذه المعادلة أنها مبدأ اساسي في الميكانيك ((مثل نيوتن و دالا امبير)) ويطلق على هذا المبدأ ((المبدأ الديناميكي للانتقالات الافتراضية)) تمييزاً له عن المبدأ التوازني الذي يتعلق بتوازن النقطة المادية والذي ينص على أن الشرط اللازم والكافي لتوازن نقطة مادية خاضعة لارتباطات مثالية هو أن يكون العمل الافتراضي الجزئي للقوة الفعالة المؤثرة عليها يساوي إلى الصفر $\left(\vec{F}.\vec{\delta_r} = \vec{0}\right)$ وهذا ما يطلق عليه مبدأ دالا امبير .

معادلات دالا مبير لاغرانج

لتكن M نقطة مادية تتحرك تحت تأثير القوة الفعالة $\vec{F}$، وقوى ربط (غير فعالة) $\vec{R}$

ولنبحث عن معادلة الحركة لهذه النقطة بالاستناد إلى الميكانيك التحليلي ولهذا نختار احداثيات جديدة نسميها الإحداثيات المعممة ((المنحنية – العامة))، ونرمز لها بـ (q_j)

إن عدد هذه الإحداثِيات يتعلق بعدد درجات حرِية النقطة المادية.

فمثلاً : إذا كانت النقطة الطليقة فلها 3 درجات حرية، والمقيدة على سطح لها درجتين، والمقيدة على منحني لها درجة واحدة.

وبالتالي لنعبر عن شعاع الموضع r للنقطة M بدلالة الإحداثيات المعممة $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3, t)$

ولنأخذ معادلة دالا امبير لاغرانج:
$$\boxed{(\vec{F} - m\vec{\Gamma})\overrightarrow{\delta_r} = \vec{0} \dots\dots\dots (1)}$$

ولنحسب حدود هذه المعادلة :

أولاً نحسب δ_r :

$$\delta_r = \frac{\partial r}{\partial q_1}\,\delta_{q_1} + \frac{\partial r}{\partial q_2}\,\delta_{q_2} + \frac{\partial r}{\partial q_3}\,\delta_{q_3} \implies \boxed{\delta_r = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial r}{\partial q_j}\,\delta_{q_j} \dots\dots\dots (2)}$$

ثانياً نحسب $F.\delta_r$

$$\boxed{F.\delta_r = \sum_{j=1}^{3}\left(F\,\frac{\partial r}{\partial q_j}\right)\delta_{q_j} = \sum_{j=1}^{3} Q_j\,\delta_{q_j}} \quad ; \quad \left(Q_j = F\,\frac{\partial r}{\partial q_j}\right)$$

تسمى Q_j بالقوة المعممة و لنحسب الحد الباقي و هو $m\overrightarrow{\Gamma}.\overrightarrow{\delta_r}$

ثالثاً نحسب $m\overrightarrow{\Gamma}.\overrightarrow{\delta_r}$

سنحسب Γ التسارع، و هو مشتق السرعة v ، لإيجاد السرعة نشتق شعاع الموضع r بالنسبة للزمن .

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial q_1}\,q_1' + \frac{\partial r}{\partial q_2}\,q_2' + \frac{\partial r}{\partial q_3}\,q_3' + \frac{\partial r}{\partial t} \implies \boxed{\vec{v} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial r}{\partial q_j}\,q_j' + \frac{\partial r}{\partial t}}$$

اشتقينا $\vec{v}$ بالنسبة لـ q_i'

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial q_j'} = \frac{\partial r}{\partial q_j} \dots\dots\dots (3)} \quad ; j = 1,2,3$$

اصبح لدينا
$$\boxed{m\overrightarrow{\Gamma}.\overrightarrow{\delta_r} = m\sum_{j=1}^{3}\left[\left(\frac{dv}{dt}.\frac{\partial r}{\partial q_j}\right)\delta_{q_j}\right] \dots\dots\dots (4)}$$

لنحسب $\left(\frac{dv}{dt}.\frac{\partial r}{\partial q_j}\right)$ للعلاقة (4) وذلك من العلاقة التالية :

$$\frac{d}{dt}\left(v.\frac{\partial r}{\partial q_j}\right) = \frac{dv}{dt}\,\frac{\partial r}{\partial q_j} + v\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial r}{\partial q_j} \implies \left(\frac{dv}{dt}.\frac{\partial r}{\partial q_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(v.\frac{\partial r}{\partial q_j}\right) - v\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial r}{\partial q_j}$$

حيث $\left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial r}{\partial q_j}\right)$ من شعاع الموضع مشتق الأول بالنسبة لـ q_j والثاني بالنسبة للزمن

وإذا بدلنا موضع الاشتقاقين لا يتغير.

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial r}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\,\frac{dr}{dt} = \frac{\partial v}{\partial q_j}$$

وبالتالي أصبحت العلاقة (4) بعد التغيرات كما يلي :

$$m\overrightarrow{\Gamma}.\overrightarrow{\delta_r} = \sum_{j=1}^{3}\left[\frac{d}{dt}\left(mv.\frac{\partial r}{\partial q_j}\right) - m\left(v\,\frac{\partial v}{\partial q_j}\right)\right]\delta_{q_j} \dots\dots (*)$$

وبما أن $\frac{\partial r}{\partial q_j} = \frac{\partial v}{\partial q'_j}$ حسب (3) , وبالتعويض بالعلاقة $(*)$ نجد .....

$$\boxed{m\overrightarrow{\Gamma}.\overrightarrow{\delta_r} = \Sigma_{j=1}^{3}\left[\frac{d}{dt}\left(mv.\frac{\partial v}{\partial q'_j}\right) - m\left(v\frac{\partial v}{\partial q_j}\right)\right]\delta_{q_j} \dots (\$)}$$

إذا أخذنا عبارة الطاقة الحركية: $T = \frac{1}{2}mv^2$ نشتقها بالنسب للإحداثيات المعممة

فنجد : $\boxed{\frac{\partial T}{\partial q'_j} = mv\frac{\partial v}{\partial q'_j} \dots (@)}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial q_j} = mv\frac{\partial v}{\partial q_j}$

نعوض $(@)$ بالعلاقة $(\$)$ فنجد :

$$m\overrightarrow{\Gamma}.\overrightarrow{\delta_r} = \Sigma_{j=1}^{3}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\delta_{q_j} \Rightarrow \boxed{\Sigma_{j=1}^{3}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right]\delta_{q_j} = 0}$$

وإذا كانت الارتباطات مستقلة يكون لدينا :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j}$$

وهذه المعادلات الأخيرة ((بالمربع الأسود (الغامق))) تدعى " معادلات لاغرانج من النوع الثاني " .

" انتهت المحاضرة "

صفحتنا على فيسبوك: IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/	مجموعة السنة الثانية : Improve Our Mathematics	مجموعة السنة الأولى: طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق 2017

إعداد: محمد علي فليون ** رهف سليمان