نظري

◄ دكتور المادة: جبران جبران

◄ المحاضرة الرابعة — عنوان المحاضرة: المتتاليات في فضاء متري

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـالفضاء المتري الجزئي

٢ـالمجموعات المحدودة و المسافات بين المجموعات

٣ـالمتتاليات في فضاء متري

٤ـتعريف تقارب متتالية و أهم ما يميز المتتاليات المتقاربة في فضاء متري

الفضاء المترى الجزئى : إذا كان (X,d) فضاءً مترياً و كانت $\emptyset \neq Y \subseteq X$ فإن مقصور التابع d على Y هو تابع مسافة على Y أي أنّ:

$$d: Y \times Y \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto d(x,y)$$

هو تابع مسافة على Y، و بالتالي يكون (Y,d) فضاء متري ندعوه فضاء متري جزئي من الفضاء المتري (X,d)

تذكر : ليكن لدينا التابع $f: A \to B$ الذي يصور كل عنصر $x \in A$ بالعنصر $f(x) \in B$ عندئذٍ كل تابع معرف على مجموعة جزئية من A و لتكن $D \subseteq A$ (منطلقه D محتوى في منطلق f) و له نفس قاعدة ربط f هو مقصور للتابع f على D.

مثال : ليكن لدينا التابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ قاعدة ربطه $f(x) = x^2$ ، إن التابع $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ و الذي قاعدة ربطه $g(x) = x^2$ هو مقصور للتابع f على المجموعة $D = \mathbb{R}^+$ لأنه تابع منطلقه مجموعة جزئية من منطلق f و له نفس قاعدة ربط f.

مثال : لنأخذ الفضاء المتري $(\mathbb{R},d)$ حيث d تابع المسافة المألوفة على $\mathbb{R}$ $(d(x,y)=|x-y|)$
عندئذٍ يكون $(\mathbb{N},d)$ فضاء متري جزئي من $(\mathbb{R},d)$

مثال : لنأخذ الفضاء المتري $(\mathbb{R},d)$ حيث d تابع المسافة المألوفة على $\mathbb{R}$ عندئذٍ يكون d تابع مسافة على المجموعة $Y=[2,7[\cup[8,10]\subseteq\mathbb{R}$ و بالتالي يكون (Y,d) فضاء متري جزئي من $(\mathbb{R},d)$.

و الآن لنتعرف على بعض المفاهيم و التعاريف الجديدة :

١- المجموعة المحدودة في فضاء متري (X,d):

ليكن (X,d) فضاءً مترياً و لتكن $A\subseteq X$ ، نقول عن المجموعة A إنها محدودة في الفضاء المتري (X,d) إذا وجد عدد حقيقي موجب $M>0$ بحيث يحقق أنه :
$$\forall x,y\in A\,;\, d(x,y)<M$$

٢- المسافة بين مجموعتين في فضاء متري (X,d) :

ليكن (X,d) فضاء متري و لتكن المجموعتان $A,B\subseteq X$ ، نعرف المسافة بين A وB بالشكل :
$$d(A,B)=\inf\{d(x,y)\ :x\in A\,,y\in B\}$$

٣- المسافة بين عنصر و مجموعة في فضاء متري (X,d) :

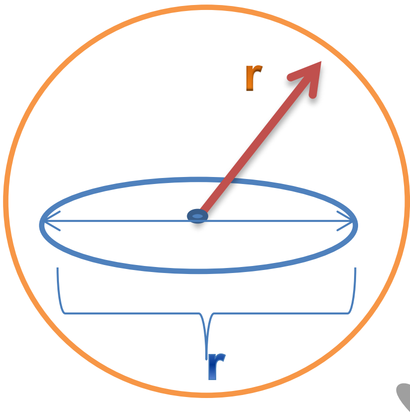
ليكن (X,d) فضاء متري و لتكن المجموعة $A\subseteq X$ و $x\in X$ عنصراً ما ، نعرف المسافة بين العنصر x و المجموعة A بأنها المسافة بين المجموعتين $\{x\},A$.

٤- قطر مجموعة في فضاء متري (X,d):

ليكن (X,d) فضاء متري و لتكن المجموعة $A\subseteq X$،نعرف قطر المجموعة A بالشكل :
$$diam(A)=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}$$

نتيجة : قولنا أن المجموعة A محدودة فهذا **يكافئ** قولنا أنه يوجد $r>0$ بحيث يكون $A\subseteq N_d(a,r)$ حيث $a\in A$.

و هذا يعني أنه إذا كانت A محدودة فهنالك كرة تحوي هذه المجموعة ... و يمكن ان نأخذ نصف قطر الكرة هو قطر المجموعة فنضمن بذلك أن المجموعة بأكملها أصغر من الكرة (بالنسبة لعملية الاحتواء) أي $r=diam(A)$



لاحظ أنه عندما اخترنا نصف قطر الكرة هو قطر المجموعة كاملاً سنضمن أن المجموعة كلها محتواة في الكرة المختارة (و التي مركزها عنصراً a من A)

<u>مثال :</u> لنأخذ $\mathbb{R}$ المزودة بالمسافة المألوفة فنجد حسب التعاريف السابقة :

$$d(]1,2[\,,[3,5[) = 3 - 2 = 1$$

لأنه حسب التعريف نبحث عن أكبر حد أدنى للمسافات بين نقاط المجموعتين و هنا أصغر مسافة هي المسافة بين 2 و 3

بشكل مشابه نجد أن: $d(]1,4[,]3,7[) = 0$ لأن المجموعتين متقاطعتين

و أيضاً $d(]1,10],]10,12[) = 10 - 10 = 0$

<u>مثال:</u> لتكن المجموعة $\left\{\frac{1}{n} :\in \mathbb{N}\right\}$ ، عندئذٍ $d\left(0,\left\{\frac{1}{n} :\in \mathbb{N}\right\}\right) = 0$

<u>سؤال :</u> هل التابع d **لمسافة بين مجموعتين** هو تابع مسافة ، بمعنى آخر : هل التابع d المعرف بالشكل التالي هو تابع مسافة ؟؟ :

$$d: P(X) \times P(X) \to \mathbb{R}$$

$$(A,B) \longmapsto d(A,B)$$

<u>جواب :</u> لا ليس تابع مسافة ... لعدم تحقق الشرط الثاني من شروط تابع المسافة و الذي ينص على أنه إذا انعدمت المسافة بين عنصرين تساوى هذان العنصران ...

و هذا غير محقق هنا لأنه يوجد عناصر (مجموعات) البعد بينها معدوم إلا أنها غير متساويين و خذ مثلاً على ذلك أي مجموعتين متقاطعتين فستجد أنه :

$$\forall A,B \in P(X) : A \neq \emptyset \ ,B \neq \emptyset \ \ ,A \neq B : A \cap B \neq \emptyset \ \Rightarrow d(A,B) = 0$$

المتتاليات في فضاء متري : ليكن (X,d) فضاء متري ، نعرف المتتالية في هذا الفضاء بأنها التابع :

$$f:\mathbb{N}\to X$$
$$n\longmapsto f(n)=a_n$$

و نرمز لها $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

تقارب متتالية في فضاء متري : نقول عن المتتالية $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ في فضاء متري (X,d) إنها متقاربة من $a\in X$ إذا تحقق أحد الشرطين المتكافئين التاليين :

١- $\forall\varepsilon>0;\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0\Longrightarrow d(a_n,a)<\varepsilon$
(من أجل كل ε موجب يوجد دليل مناسب n_0 بحيث تصبح المسافة بين a_n و a أصغر من ε و ذلك عندما $n\geq n_0$)

٢- المتتالية ***الحقيقية*** التي حدها العام $b_n=d(a_n,a)$ متقاربة من الصفر في $\mathbb{R}$.

مبرهنة : في أي فضاء متري نهاية المتتالية المتقاربة وحيدة

البرهان: فكرة البرهان : سنفرض متتالية $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من عنصرين $a,a'\in X$ و ما علينا إلا إثبات أنّ $a=a'$ ، و من أجل ذلك سنثبت أن $d(a,a')=0$ و هذا يكافئ أنّ $\boldsymbol{d(a,a')<\varepsilon}$ (مهما تكن $\varepsilon>0$) ، لنبدأ :

بما أن $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $a\in X$ فهذا يعني أنّ:

$$\forall\varepsilon>0,\frac{\varepsilon}{2}>0\,;\exists n_1\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0\Longrightarrow d(a_n,a)<\frac{\varepsilon}{2}$$

و أيضاً بما أن $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $a'\in X$ فهذا يعني أنّ:

$$\forall\varepsilon>0,\frac{\varepsilon}{2}>0\,;\exists n_2\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0\Longrightarrow d(a_n,a')<\frac{\varepsilon}{2}$$

الآن ، و بالاستفادة من متراجحة المثلث :

$$d(a,a')\leq d(a,a_n)+d(a_n,a')<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\ \ ,\forall n\geq n_0=\max\{n_1,n_2\}$$

و لكن المقدار $d(a,a')$ مستقل عن n_0 ، إذاً نخلص إلى أنه: $\forall\varepsilon>0\,;d(a,a')<\varepsilon\Leftrightarrow a=a'$

و بذلك يتم المطلوب.

المتتالية الكوشية : نقول عن المتتالية $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ إنها كوشية (متتالية كوشي) إذا تحقق أن :

$$\forall\varepsilon > 0\,;\exists n_0 : \forall n,m \geq n_0 \Longrightarrow d(a_n,a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

مبرهنة : كل متتالية متقاربة تكون كوشية

البرهان : طريقة أولى : بفرض أن $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $a \in X$ عندئذٍ :

$$\forall\varepsilon > 0\,;\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n,a) < \varepsilon$$

و ليكن $n,m \geq n_0$ عندئذٍ:

$$d(a_n,a_m) \leq d(a_n,a) + d(a_m,a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

طريقة ثانية : لتكن المتتالية $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $a \in X$ عندئذٍ و لتكن المتتالية الحقيقية التي حدها العام $b_n = d(a_n,a)$ عندئذٍ و لأنها متقاربة يتحقق أنّ

$$\forall\varepsilon > 0\,;\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |b_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

و ليكن $n,m \geq n_0$ عندئذٍ:

$$d(a_n,a_m) \leq d(a_n,a) + d(a_m,a) = b_n + b_m < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

مبرهنة : كل متتالية متقاربة في فضاء متري تكوت محدودة.

البرهان : بفرض أن $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة من $a \in X$ و هذا يكافئ :

$$\forall\varepsilon > 0\,;\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Longrightarrow d(a_n,a) < \varepsilon$$

و لنبرهن على وجود $M > 0$ يحقق أن : $\forall n,m \in \mathbb{N} : d(a_n,a_m) < M$

لنأخذ مثلاً $\varepsilon = 1$ فنجد أن :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Longrightarrow d(a_n,a) < 1$$

ليكن $n,m \in \mathbb{N}$ و لنميز الحالات التالية :

أ- إذا كان $n,m \ge n_0$ عندها يكون: $d(a_n,a_m) \le d(a_n,a) + d(a_m,a) < 1+1 = 2$

ب- إذا كان $n,m < n_0$ عندها نأخذ $L = \max\{d(a_i,a_j) : 1 \le i,j < n_0\}$ فيكون :

$$d(a_n,a_m) \le L$$

ت- إذا كان $n < n_0$, $m \ge n_0$ عندئذٍ يكون :

$$d(a_n,a_m) \le d(a_n,n_0) + d(a_{n_0},a_m) \le L + 1$$

و لنختار عدد يناسب جميع الحالات السابقة فنأخذ $0 < M = L + 2$ فيكون :

$$d(a_n,a_m) < M \quad ,\forall n,m \in \mathbb{N}$$

انتهت المحاضرة

صفحتنا على فيسبوك: IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/	مجموعة السنة الثانية : Improve Our Mathematics	مجموعة السنة الأولى: طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق ٢٠١٧

إعداد: عبد الرحمن البحش – شهناز طاطيش – نذير تيناوي