المحاضرة السابعة:

تذكرة: الحلقة: لتكن $X \neq \phi$ عندئذٍ الثلاثية $(P(X), \Delta, \cap)$ حلقة بالمعنى الجبري.

وقد عرفنا الحلقة بالشكل: لتكن $\mathcal{C} \subseteq P(X)$، فندعو $\mathcal{C}$ حلقة من أجزاء X إذا حققت الشروط التالية:

$\phi \in \mathcal{C}$

$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A - B \in \mathcal{C}$

$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \Delta B \in \mathcal{C}$

إذا حققت الحلقة $\mathcal{C}$ أحد الشرطين التاليين المتكافئين

1 - $X \in \mathcal{C}$

2 - $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$

فإن $\mathcal{C}$ تكون جبراً من أجزاء X.

نصف الحلقة: لتكن $\phi \neq \mathcal{C} \subseteq P(X)$، نقول عن $\mathcal{C}$ أنه نصف حلقة إذا وفقط إذا حقق الشروط التالية:

$\phi \in \mathcal{C}$

$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$

$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A - B = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$

حيث $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$

<< أي أن فرق أي مجموعتين من $\mathcal{C}$ هو عنصر من $\mathcal{C}$ أو يكتب على شكل اتحاد عدود منتهٍ منفصل لعناصر من $\mathcal{C}$ >>

نصف الجبر: نقول عن $\mathcal{C}$ أنه نصف جبر إذا كان $\mathcal{C}$ نصف حلقة ويحقق أحد الشرطين التاليين:

1- $X \in \mathcal{C}$

2- $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n ; C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{C}$

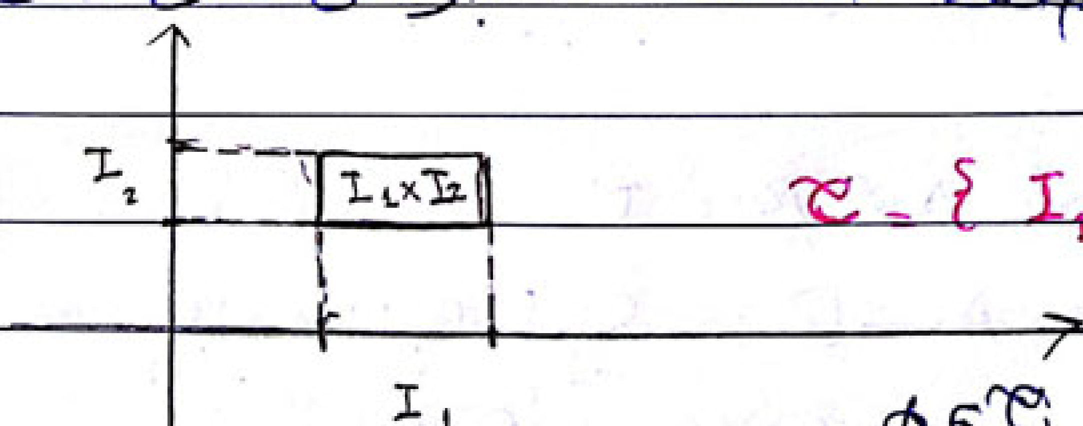
أمثلة: إن المجموعة $\mathcal{J} = \{[a,b[; a<b\}$ هي نصف حلقة، وكذا المجموعات $\mathcal{J}_{co}$ و $\mathcal{J}_{oc}$:

$\mathcal{J}_{oc} = \{]a,b] ; a<b\}$

$\mathcal{J} = \{ I ;$ مجال جزئي من $\mathbb{R}$ $I \}$

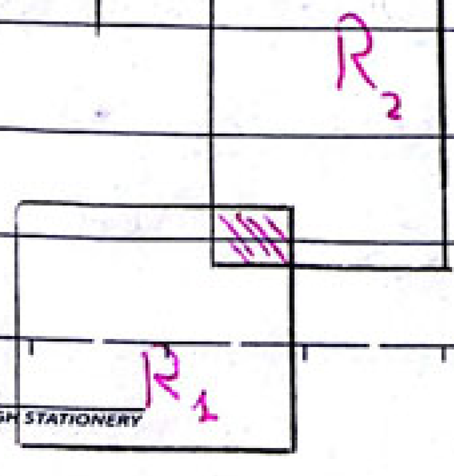
• لنأخذ الآن X عبارة عن المستوي ولنأخذ الصف $\mathcal{C}$ الجزئي من X والذي يمثل صف المستطيلات والتي أضلاعها توازي المحاور الإحداثية

إن $\mathcal{C}$ نصف حلقة سنبرهن على ذلك بالرسم.

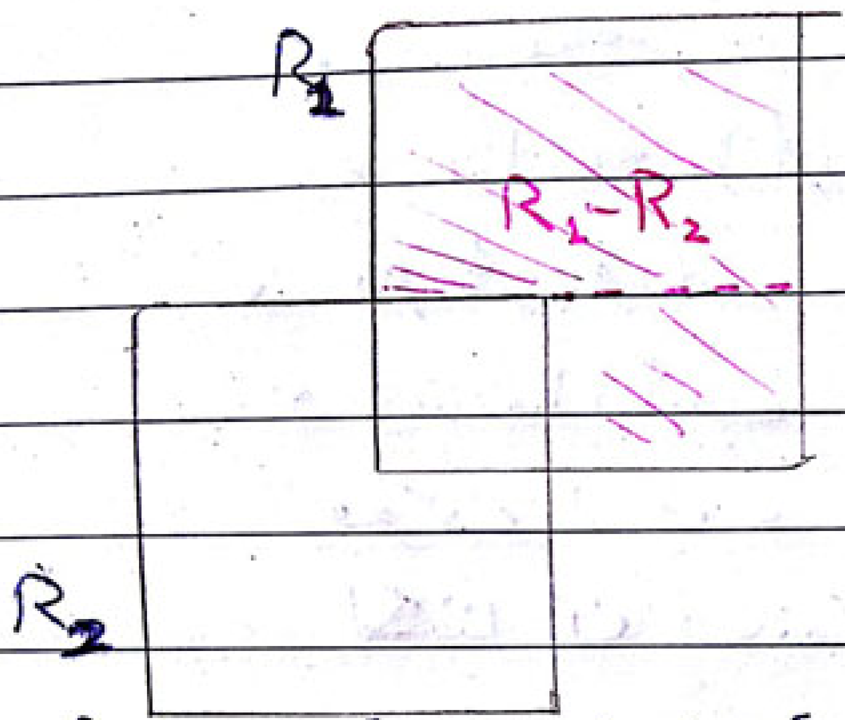


$\mathcal{C} = \{ I_1 \times I_2 : I_1 \times I_2 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} ;$ كلاهما مجال $I_1, I_2 \}$

واضح أن $\emptyset \in \mathcal{C}$



إن تقاطع أي مستطيلين هو مستطيل



يتضح من الرسم المجاور
أن R_1-R_2 هو اتحاد
مستطيلين.

بالتالي $\mathcal{C}$ هي نصف حلقة.

• **القياس الشعاعي:**

هو تطبيق معرف على جبر تام (أو نصف حلقة أو نصف جبر ولكن عندها نضيف شروطاً إلى التطبيق) ومستقره فضاء باناخ (أو أي فضاء شعاعي) أي:

$$\mu : \mathcal{C} \longrightarrow (E, \|\cdot\|)$$ فضاء باناخ

ويحقق ما يلي: $\forall A, B \in \mathcal{C}, \forall A_i \in \mathcal{C}, i = 1, 2, \dots$

1- $\mu(\phi) = 0$ "μ يحترم الخالية"

2- $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

"μ قياس شعاعي جمعي"

3- $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

"μ قياس شعاعي جمعي عدّياً"

- في حال كان μ يحقق جميع ما سبق ولكن اختلف المستقر فيختلف اسم μ ويكون:

μ قياس موجب $\Leftarrow$ المستقر هو $\mathbb{R}_+$

μ قياس حقيقي $\Leftarrow$ المستقر هو $\mathbb{R}$

μ قياس عقدي $\Leftarrow$ المستقر هو $\mathbb{C}$

ملاحظة:

ندعو الثنائية $(X,\mathcal{A})$ فضاء قيوسي

و $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيس أو فضاء القياس

وعندما نكتب (X,μ) هنا يكون الجبر التام معرّف لدي مسبقاً (مثلاً $P(X)$ أو $B_{\mathbb{R}}$)

لكننا لن نستخدم هذا الرمز.

القياس الكامل (التام):

ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيساً، ندعو μ قياس كامل ((أو تام)) إذا وفقط إذا حقق الشرط التالي:

$$A\in\mathcal{A} : \mu(A)=0 \ , \ B\subseteq A \Rightarrow \mu(B)=0$$

أي $B\in\mathcal{A}$

أو نقول أن μ يحوي جميع المجموعات الجزئية من المجموعات الصفرية في منطلقه.

• $f \overset{a.e}{=} g$ تعني أن مجموعة العناصر التي لا تحقق أن $f(x)=g(x)$ هي مجموعة مهملة

$$\mu(\{x : f(x)\neq g(x)\})=0$$

• $f \overset{a.e}{\leq} g$ أي أن مجموعة العناصر التي تحقق أن $f(x)>g(x)$ هي مجموعة مهملة أي أن

$$\mu(\{x : f(x)\not\leq g(x)\})=0$$

$$\int f\,d\mu = \int g\,d\mu \Leftarrow f \xrightarrow{a.e} g$$

وذلك لأن التكامل على مجموعة مهملة يساوي الصفر.

تذكر: المجموعة المهملة: هي المجموعة المحتواة في مجموعة صفرية (قياسها صفر). أي: نقول أن B مهملة بالنسبة للقياس μ أو مهملة $-\mu$ إذا تحقق:

$$\exists A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0,\ B \subseteq A$$

التطبيق القيوس: ليكن $(X_1, \mathcal{A}_1)$ و $(X_2, \mathcal{A}_2)$ فضائين قيوسين وليكن f تطبيقاً

$$(X_1, \mathcal{A}_1) \xrightarrow{f} (X_2, \mathcal{A}_2)$$

نقول عن f إنه قيوس إذا احترم المجموعات القيوسة في المنطلق والمستقر، أي إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة قيوسة في المستقر هي مجموعة قيوسة في المنطلق وبعبارة أخرى:

$$f \text{ قيوس} \Leftrightarrow (\forall A_2 \in \mathcal{A}_2 : f^{-1}(A_2) = A_1 \in \mathcal{A}_1)$$

انظر page 65 (١-٢-٣)

(١-٣)

page 111 هام جداً والحل (١١-١-٣)

هامة page 66

مبرهنة : (هامة)

إذا كان $\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{A}_2$ و $\mathcal{J}_2$ مولّد لـ $\mathcal{A}_2$ أيّ:

$\mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{J}_2)$ ، فإن الشرط اللازم والكافي لكي يكون f قيوس هو أن يتحقق الشرط :

$$\forall I_2 \in \mathcal{J}_2 : f^{-1}(I_2) \in \mathcal{A}_1$$

(البرهان هام نأخذه لاحقاً)

p:66 التدريبات ٣-٢-٢ هامة.

تدريب مشهور (2) حلول في الكتاب صفحة 192

ممكن أن يأتي في الامتحان لكن بدلاً من كون

$\xi \subseteq 2^X = P(X)$ يكون $\xi \subseteq \mathfrak{J}$

p:66 و p:67 مطلوبين.

page67 مبرهنة ٣-٢-٨ - مطلوب البرهان

ليكن $f:(X, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ ، يكون f قيوس

إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة بوريلية

هي مجموعة قيوسة.

لدينا $\xi_1 = \{]a,b[\,,\, a \in \mathbb{R} \} \subseteq B_{\mathbb{R}}$

و $\xi_2 = \{]-\infty, a] \,,\, a \in \mathbb{R} \} \subseteq B_{\mathbb{R}}$

بتطبيق التمرين 2 على ما سبق نجد أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون f قيوس هو أن تكون الصورة العكسية لكل مجال من النمط ξ_1 أو ξ_2 قيوسة وكذا بالنسبة لـ ξ_3 أو ξ_4

$\xi_3 = \{]-\infty, a[\,,\, a \in \mathbb{R} \} \subseteq B_{\mathbb{R}}$

$\xi_4 = \{ [a, \infty[\,,\, a \in \mathbb{R} \} \subseteq B_{\mathbb{R}}$

pag 68 : ٣ - ٢ - ١ - تدريب: هام جداً وكذا التمارين المشتقة منه وهي:

إذا كان: $(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{g,f} (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$

حيث f, g قيوسين فإن المجموعات التالية جميعها قيوسة:

$M_1 = \{ x \in M : f(x) < g(x) \}$

$M_2 = \{ x \in M : f(x) \leq g(x) \}$

$$M_3 = \{ x \in X : f(x) > g(x) \}$$

$$M_4 = \{ x \in X : f(x) \geq g(x) \}$$

$$M_5 = \{ x \in X : f(x) = g(x) \}$$

سنبرهن أنّ M_1 قيوسة:

بداية سنذكر بمايلي:

$$f(x) < g(x) \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : f(x) < r < g(x)$$

(لأنّ $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$ و $f(x)$ و $g(x)$ أعداد حقيقية)، إذن:

$$\{ x : f(x) < q < g(x) \} = \{ x : f(x) < r \} \cap \{ x : r < g(x) \}$$

بأنّ تقاطع مجموعتين قيوستين هو مجموعة قيوسة فإن الطرف الأيسر هو مجموعة قيوسة

ورقة عمل (2) :

عرّف الصف المطرد وأثبت أنّ صف المجالات المغلقة في $\mathbb{R}$ ليس صفاً مطرداً.

تعريف الصف المطرد: لتكن $X \neq \phi$ و ح صفاً من أجزاء X، نقول عن ح أنّه صف مطرد إذا حقق مايلي: ١. ح صف غير خالي.

اتحاد أي متتالية متزايدة من عناصر ح ينتمي

إلى ح، وكذا تقاطعها.

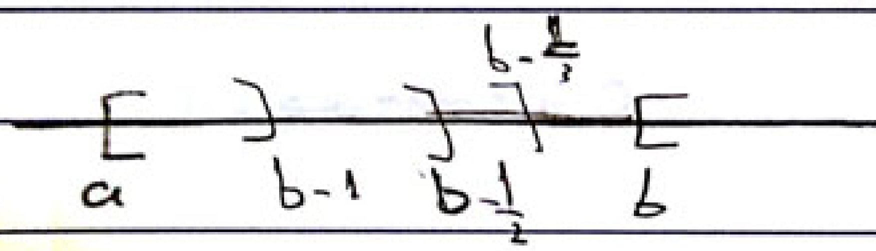
• تقاطع أي متتالية متناقصة من عناصر ح ينتمي إلى ح، وكذا اتحادها.

لدينا $\phi \neq \{[a,b],\ a,b\in\mathbb{R}\}$

نلاحظ أنه لو أخذنا المتتالية المتزايدة

$[a, b-\frac{1}{n}] \in \mathcal{C}$ من أجل $n\in\mathbb{N}$ فإن:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a, b-\tfrac{1}{n}] = [a,b[\notin \mathcal{C}$$



ورقة عمل (2): السؤال الأول: بين أن صنف المجالات المحدودة ونصف المغلقة من الشكل $[a,b[$ ليس جبرا تاما من أجزاء $\mathbb{R}$ وليس صفا مطردا ولكنه نصف حلقة. إن $\mathcal{C}=\{[a,b[,\ a\leq b\}$ ليس جبرا تاما لأن $\mathbb{R}\notin\mathcal{C}$

وليس صفا مطردا لأن: $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a, b+\frac{1}{n}[= [a,b] \notin \mathcal{C}$

متتالية متناقصة من عناصر ح

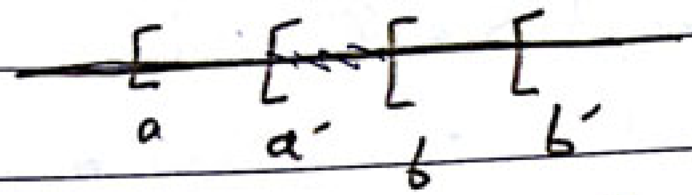
ولكنه نصف حلقة لأن:

$\boxed{1}$ $\phi \in \mathcal{C}$ $\Leftarrow$ $\phi = [a,a[$

$\boxed{2}$ $[a,b[\cap [a',b'[= \phi \in \mathcal{C}$

أو $[a,b[\cap [a',b'[\neq \phi \in \mathcal{C}$

كما هو مبين بالرسم:

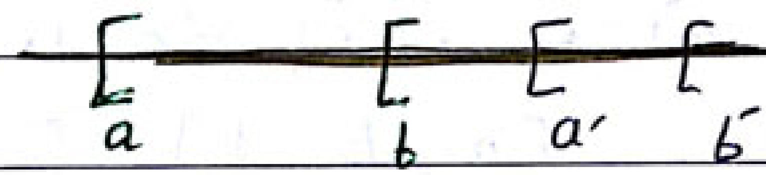


إن $[a,b[- [a',b'[$ $\boxed{3}$

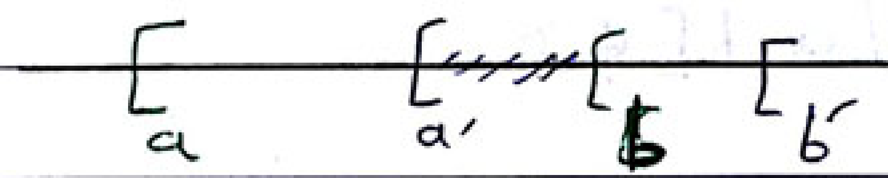
هو عنصر من ح أو اتحاد منته عدود منفصل

لعناصر من ح. ونبين ذلك من خلال الرسم

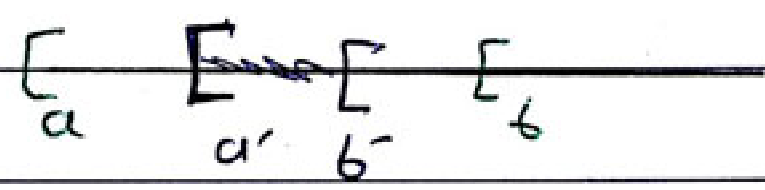
الفرق عناصر Φ



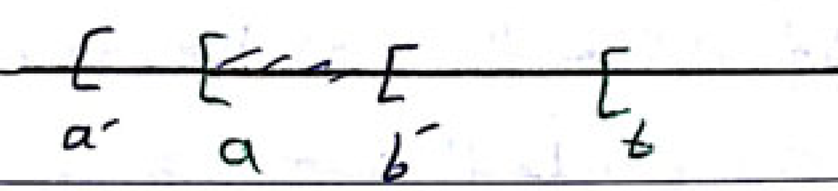
الفرق عنصر من ح



الفرق عنصر من ح



الفرق عنصر من ح



• بين أنه إذا كان A جبراً تاماً يحوي صف المجالات ح السابق ذكره فإنه يحوي كلاً من المجالات:

$B_1 =]0,10[\, , B_2 = [0,\infty[\, , B_3 =]0,\infty[\, , B_4 = [0,10] \, , \mathbb{Z}.$

$$B_1 =]0,10[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a+\frac{1}{n}, b[$$

$$B_2 = [0,\infty[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [0,n[$$

$$B_3 =]0,\infty[= \bigcup_{n=1}^{\infty}]\frac{1}{n}, n[$$

$$B_4 = [0,10] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, 10+\frac{1}{n}[$$

$$\mathbb{Z} = \dots \cup \{-2\} \cup \{-1\} \cup \{0\} \cup \{1\} \cup \dots$$

وحيث أنّ $\{a\}$ تنتمي إلى A لأنّ:

$$\{a\} = [a,a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a, a+\frac{1}{n}[$$

وطالما A جبر تام فإنّه مغلق بالنسبة للاتحاد المعدود

وبالتالي $\mathbb{Z}$ تنتمي إلى A

انتهت المحاضرة