نظري

◄ دكتورة المادة: ريم الحاج خليفة

◄المحاضرة: السادسة        عنوان المحاضرة: المثاليات

**المحتوى العلمي** : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

**سوف ندرس في هذه المحاضرة مجموعة من المبرهنات عن المثاليات اليمينية واليسارية .**

**مبرهنة ١:** ليكن $\mathcal{R}$ حلقة و $S = \{A_i : i \in I\}$ مجموعة غير خالية من المثاليات اليسارية ( اليمينية ) في $\mathcal{R}$ عندئذٍ المجموعة $\bigcap_{i\in I} A_i$ هي مثالي يساري (يميني ) في $\mathcal{R}$ .

**البرهان :** سنبرهن اليسارية واليمينة بنفس الطريقة

بما أن تقاطع أي جماعة غير خالية من الزمر الجزئية من الزمرة $(\mathcal{R},+)$ هو زمرة جزئية في $(\mathcal{R},+)$ فإن $\bigcap_{i\in I} A_i$ هي زمرة جزئية من $(\mathcal{R},+)$ " الشرط الأول محقق "

ومن جهة أخرى $\forall r \in \mathcal{R}$ وَ $\forall x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ عندئذٍ $x \in A_i$ وذلك $\forall i \in I$ وبما أن $A_i$ مثالي يساري فهي تحقق $rx \in \bigcap A_i \Leftarrow \forall x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ " الشرط الثاني محقق "

وبذلك يتحقق أن $\bigcap_{i\in I} A_i$ مثالي يساري في $\mathcal{R}$ .

**مبرهنة ٢:**

ليكن $(\mathcal{R},+,.)$ حلقة عندئذٍ اذا كان $A,b$ مثاليين يساريين (يمينين ) في $\mathcal{R}$ فإن :

١- $A+B$ مثالي يساري (يميني ) في $\mathcal{R}$ .

٢- $A.B$ مثالي يساري (يميني ) في $\mathcal{R}$ .

**البرهان :**

ليكن $A,B$ مثاليين يساريين في $\mathcal{R}$ .

١- نعلم سابقاً بأن $A+B = \{a+b : a \in A , b \in B\}$

بما أن $A,B$ مثاليين يساريين في $\mathcal{R}$ فإن كلاً من $A,B$ مجموعات غير خالية ومنه فإن $A+B$ مجموعة غير خالية .

**لنأخذ عنصرين ينتميان إلى المجموعة $A+B$**

ليكن $x,y \in A+B$ عندئذٍ :

$x = a+b \,, y = a_1+b_1$ : $b,b_1 \in B \,, a,a_1 \in A$ فإن:

$$x-y = (a+b)-(a_1+b_1) = \underbrace{(a-a_1)}_{\in A} + \underbrace{(b+b_1)}_{\in B} \in A+B$$

"الشرط الاول محقق" $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},+)$ زمرة جزئية في الزمرة $(\mathcal{R},+)$

ومن جهة أخرى : ليكن $\forall r\in\mathcal{R}$ فإن :

$$r.x=r(a+b)=\underbrace{\overbrace{ra}^{\in A}}_{\text{مثالي يساري } A}+\underbrace{\overbrace{rb}^{\in B}}_{\text{مثالي يساري } B}\in A+B$$

"الشرط الثاني محقق "

$\Leftarrow A+B$ مثالي يساري في $\mathcal{R}$ .

٢- نعلم سابقاً أن :

$A.B=\{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i : a_i\in A, b_i\in B\}$ إن جداء $A.B$ هو عبارة عن مجموع منتهٍ وإن المجموعة $A.B$ غير خالية لأن كلاً من $A,B$ مجموعات غير خالية .

ليكن $x,y\in A.B$ عندئذٍ :

$y=\sum_{i=1}^{n}a'_i.b'_i$ , $x=\sum_{i=1}^{n}a_i.b_i$ بحيث $a_i,a'_i\in A$ , $b_i,b'_i\in B$

$$x-y=(\sum_{i=1}^{n}a_i.b_i)-(\sum_{i=1}^{n}a'_i.b'_i)=(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)+(\sum_{i=1}^{n}(-a'_i)b'_i)\in A.B$$

"الشرط الاول محقق" $(\boldsymbol{A.B},+)$ زمرة جزئية في الزمرة $(\mathcal{R},+)$

ومن جهة أخرى $\forall r\in\mathcal{R}$ فإن :

$$rx=r(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(\underbrace{\overbrace{ra_i}^{\in A}}_{\text{مثالي يساري } A}\right)b_i\in A.B$$

$\Leftarrow A.B$ مثالي يساري في $\mathcal{R}$ .

**مبرهنة ٣:** ليكن $(\mathcal{R},+,.)$ حلقة عندئذ إذا كان $K$ مثالياً يسارياً في $\mathcal{R}$ و $L$ مثالياً يمينياً في $\mathcal{R}$ فإن $K.L$ هو مثالي في $\mathcal{R}$ .

**البرهان :** إن $K.L$ هو مجموعة غير خالية لأن كلاً من $K$ مثالياً يسارياً و $L$ مثالياً يمينياً فرضاً .

ليكن $x,y\in K.L$ عندئذٍ :

$y=\sum_{i=1}^{n}a'_i.b'_i$ , $x=\sum_{i=1}^{n}a_i.b_i$ حيث هذه المجاميع هي مجاميع منتهية وإن :

$a_i,a'_i\in K$ , $b_i,b'_i\in L$

$$x-y=(\sum_{i=1}^{n}a_i.b_i)-(\sum_{i=1}^{n}a'_i.b'_i)=(\sum_{i=1}^{n}\underbrace{a_ib_i}_{\in K})+(\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(-a'_i)b'_i}_{\in L})\in K.L$$

ومن جهة أخرى $\forall r_1,r_2\in\mathcal{R}$ (نريدها مثالي اي من اليمين واليسار لذلك تم أخذ عنصرين )

$$r_1.x.r_2=r_1(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)r_2=\sum_{i=1}^{n}r_1(a_ib_i)r_2=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(r_1a_i)}_{\in K}\underbrace{(b_ir_2)}_{\in L}\in K.L$$

جميع الشروط محققة $\Leftarrow K.L$ مثالي في $\mathcal{R}$ .

**مبرهنة ٤:** ليكن $(\mathcal{R},+,.)$ حلقة إذا كانت $\mathcal{M},\mathcal{N}$ مثاليين في $\mathcal{R}$ فإن $\mathcal{N}.\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}\cap\mathcal{M}$

**البرهان :**

بفرض أن $\mathcal{N},\mathcal{M}$ مثاليين في $\mathcal{R}$ عندئذٍ حسب نظرية سابقة **(المبرهنة ١)**

**بالامتحان نكتفي بذكر نص المبرهنة ولا نكتب حسب مبرهنة سابقة بل نكتب النص فقط**

وبالتالي $\mathcal{N}\cap\mathcal{M}$ مثالي في $\mathcal{R}$ ومن جهة أخرى حسب مبرهنة سابقة **(المبرهنة ٣ )**
فإن $\mathcal{N}.\mathcal{M}$ مثالي في $\mathcal{R}$ .

ليكن $x\in\mathcal{N}.\mathcal{M}$ عندئذٍ $x=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$ بحيث $a_i\in\mathcal{N}\ ,b_i\in\mathcal{M}$
وبالتالي $a_ib_i\in\mathcal{N}.\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}.\mathcal{R}\subseteq\mathcal{N}$ **( لأن $\mathcal{N}$ مثالي )**
ولما كانت $\mathcal{N}$ زمرة بالنسبة لعملية الجمع فهي مغلقة فإن $x=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\in\mathcal{N}$
ومن جهة أخرى $a_ib_i\in\mathcal{N}.\mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}.\mathcal{R}\subseteq\mathcal{M}$
ولما كانت $\mathcal{M}$ زمرة بالنسبة لعملية الجمع فهي مغلقة فإن :

$$x=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\in\mathcal{M}\Rightarrow x\in\mathcal{N}\cap\mathcal{M}$$

**مبرهنة ٥:** لتكن $\mathcal{R}$ حلقة وَ $A_1,A_2,\dots,A_n$ مجموعة من المثاليات اليسارية (اليمينية) في $\mathcal{R}$ عندئذٍ :

١- $\sum_{i=1}^{n}A_i=\{\sum_{i=1}^{n}a_i\quad:\quad a_i\in A_i,1\le i\le n\}$ مثالي يساري (يميني ) في $\mathcal{R}$

٢- $\prod_{i=1}^{n}A_i=\{\sum_{i=1}^{n}a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in}:a_{ij}\in A_i\}$ مثالي يساري (يميني ) في $\mathcal{R}$ .

**الطلب الثاني وظيفة ( سيدرج الحل في المحاضرة التالية )**

**البرهان :**

١- لنفرض أن $A_1,A_2,\dots,A_n$ مجموعة من المثاليات اليسارية في $\mathcal{R}$ عندئذٍ بما أن كلاً من المجموعات $A_i$ غير خالية إذاً $\sum_{i=1}^{n}A_i$ غير خالية .
ليكن $x,y\in\sum_{i=1}^{n}A_i$ عندئذٍ :

$$y=\sum_{i=1}^{n}b_i\quad,x=\sum_{i=1}^{n}a_i\quad:\forall a_i,b_i\in A_i$$

$$x-y=\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}b_i=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}(-b_i)=\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)\in\sum_{i=1}^{n}A_i$$

ليكن $\forall r\in\mathcal{R}$ فإن :

$$r.x=r(\sum_{i=1}^{n}a_i)=\sum_{i=1}^{n}r(a_i)\in\sum_{i=1}^{n}A_i$$

**مبرهنة ٦:**

ليكن $\mathcal{R}$ حلقة وَ $A$ مثالياً يسارياً في $\mathcal{R}$ وَ $B$ مثالياً يمينياً في $\mathcal{R}$ عندئذٍ :

١- $1\in A$ عندما وفقط عندما $A=\mathcal{R}$ .

٢- $1 \in B$ عندما وفقط عندما $\mathcal{R} = B$ .
٣- إذا وجد في $A$ عنصر قابل للقلب من اليسار فإن $\mathcal{R} = A$ .
٤- إذا وجد في $B$ عنصر قابل للقلب من اليمين فإن $\mathcal{R} = B$ .

**البرهان :**

**١-** بفرض أن $1 \in A$ عندئذٍ $\forall x \in \mathcal{R}$ فإن $x = x.1 \in A$ وبالتالي يكون :
$\boldsymbol{\mathcal{R} \subseteq A}$ ولدينا $\boldsymbol{A}$ مجموعة جزئية في $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ وبالتالي من الاحتوائين المعاكسين :

$$\boldsymbol{\mathcal{R}} = A \Leftarrow \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{R}} \subseteq A \\ A \subseteq \mathcal{R} \end{cases}$$

**٢-** تبرهن بنفس الطريقة .
**٣-** بفرض أنه يوجد في $A$ عنصر قابل للقلب وليكن $a$ عندئذٍ يوجد له مقلوب وليكن $b \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ ومنه $\underbrace{b.a = 1 \in A}_{\text{مثالي يساري}}$ وحسب الطلب (١)

$1 \in A$ فإن $\mathcal{R} = A \Leftarrow b.a = 1 \in A$

**٤-** تبرهن بنفس الطريقة .

# <انتهت المحاضرة>

إعداد: لبنى الطون – محمد فهمي القاضي – أحمد ابو التوت