Mathematical Modeling

النمذجة الرياضية

لمحاضرة: الثالثة عشر

الدكتورة: ميسم

المحاضرة الثالثة عشر 2017-4-13

Note: في مصفوفة هيسيان إذا لم تكن معرفة موجبة أو ليست معرفة سالبة عندها لا يمكن الحكم حسب مضاريب لاغرانج ويجب اللجوء لطرق أخرى.

النموذج الساكن دون عجز ولمادة واحدة:

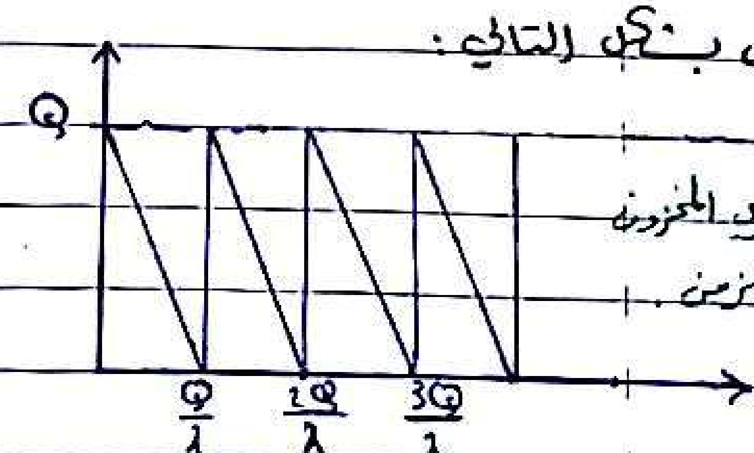
الفرضيات الأساسية لهذا النموذج:

1) حجم الطلبية الثابتة Q.
2) حجم الطلب على المخزون في وحدة الزمن λ.
3) التكلفة الثابتة لإعداد الطلبية: $C_1 = K$.
4) تكلفة الشراء والتوصيل والاستلام: $C_2 = C.Q$
5) تكلفة التخزين خلال وحدة الزمن للكمية المتبقية في المستودع $C_3 = ?$

سنحدد العلاقة التي تعطي C_3 من خلال دراسة لاحقة.

6) مدة نفاذ الكمية المخزنة $\frac{Q}{\lambda}$ وهي تساوي مدة الدورة التخزينية.

من خلال الفرضيات السابقة نستطيع تمثيل حركة المخزون بالشكل التالي:



نرمز للكمية المتبقية في المستودع في لحظة t وخلال الفترة الزمنية $[0, \frac{Q}{\lambda}]$ بالرمز q_t حيث نعطى بدلالة الزمن بواسطة معادلة المستقيم:

$$q_t = Q - \lambda t$$

حتى نستطيع حساب تكلفة التخزين نجزئ المجال الزمني $[0, \frac{Q}{\lambda}]$ إلى n مجالاً جزئياً طول كل منها Δt ثم نقوم بحساب q_i في اللحظة الزمنية t_i حيث q_i تعبر عن الكمية المتبقية من المخزون المقابلة للمجال الجزئي عندئذ: $q_i = Q - \lambda t_i$

وعليه تكون تكلفة المخزون خلال هذا المجال الجزئي:

$$C_i = h \cdot q_i \cdot \Delta t$$

h للوحدة الواحدة

$$= h \cdot (Q - \lambda t_i) \cdot \Delta t$$

وعليه إذا أردنا الحساب على كامل المجال:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i = \sum_{i=1}^{n} h \cdot (Q - \lambda t_i) \cdot \Delta t$$

وهي تكلفة المخزون خلال مجال $[0, \frac{Q}{\lambda}]$.

إذا أردنا تصغير (تقسيمات) المجال أكثر نجعل $n \to \infty$ وعليه نحصل:

$$C_3 = \lim \sum_{i=1}^{n} h \cdot (Q - \lambda t_i) \cdot \Delta t$$

$$= \int_0^{\frac{Q}{\lambda}} h(Q - \lambda t)\, dt$$

$$= \left[hQt - \frac{h\lambda t^2}{2}\right]_0^{\frac{Q}{\lambda}}$$

$$= \frac{hQ^2}{\lambda} - \frac{hQ^2}{2\lambda} = \frac{hQ^2}{2\lambda}$$

توحيد المقامات

Note: مجموع عندما $n \to \infty$ هو تكامل على طرفي المجال الجزئي

وعليه:

$$TC(Q) = C_1 + C_2 + C_3$$

$$= K + CQ + \frac{hQ^2}{2\lambda}$$

TC: مجموع التكاليف

مجموع تكاليف خلال وحدة الزمن :

$$C(Q) = \frac{TC(Q)}{Q/\lambda}$$

$$= \frac{K + C\cdot Q + \frac{h\cdot Q^2}{2\lambda}}{Q/\lambda}$$

$$= \frac{K\lambda}{Q} + C\cdot\lambda + \frac{h\cdot Q}{2}$$

النموذج الرياضي :

لإيجاد القيمة الأصغرية لتابع:

$$C(Q) = \frac{K\lambda}{Q} + C\cdot\lambda + \frac{h\cdot Q}{2} \to \min$$

مع مراعاة القيد $Q > 0$

هذا النموذج نموذج لا خطي، تابع الهدف بمتحول واحد هو Q لإيجاد القيمة الأصغرية لهذا التابع الغير مقيد نقوم بإيجاد المشتق الأول له بالنسبة لـ Q ثم نحسب قيمة Q التي تعدم هذا المشتق عند هذه القيمة يبلغ التابع قيمة حدية لتحديد نوعها نلجأ للمشتق الثاني فإذا كانت قيمة المشتق الثانية عند هذه النقطة أكبر من صفر تكون قيمة صغرى محلية أما إذا كانت أصغر من صفر تكون قيمة عظمى محلية،

$$\frac{dC(Q)}{dQ} = -\frac{K\lambda}{Q^2} + 0 + \frac{h}{2}$$

$$= \frac{-K\lambda}{Q^2} + \frac{h}{2}$$

نحسب المعادلة

$$\frac{dC(Q)}{dQ} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-K\lambda}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{K\lambda}{Q^2} = \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow Q^2 = \frac{2K\lambda}{h}$$

$$\Rightarrow Q = \sqrt{\frac{2K\lambda}{h}}$$

وهي حجم تكاليف في وحدة الزمن وهي قيمة حدية للتابع $C(Q)$ لتوضيح فيما إذا كانت صغرى أو عظمى:

$$\frac{d^2C(Q)}{dQ^2} = -\left(\frac{-2\lambda KQ}{Q^4}\right) = \frac{2\lambda K}{Q^3} > 0$$

لأن كل من K و λ و Q مقادير موجبة تماماً

بما أن المشتق الثاني أكبر من صفر فإن القيمة الحدية قيمة صغرى وبالتالي:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2K\lambda}{h}}$$