6 / 4 / 2017

المحاضرة الثامنة

الحالة الثالثة:

إذا كان $F(r)$ لديه جذور عقدية عندئذٍ:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = \lambda + i\mu \\ r_2 = \lambda - i\mu \end{array}\right\} \quad , \quad \mu \neq 0$$

فيكون:

$$x^r = e^{\ln x^r} = e^{r \ln x} = e^{(\lambda + i\mu)\ln x} = e^{\ln x^\lambda} \cdot e^{i\mu \ln x}$$

$$= x^\lambda \left[\cos(\mu(\ln x)) + i \cdot \sin(\mu(\ln x)) \right] \quad , \quad x > 0$$

$$y(x) = c_1 x^{\lambda + i\mu} + c_2 x^{\lambda - i\mu} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = x^\lambda \cdot \cos(\mu \ln x) \\ y_2(x) = x^\lambda \cdot \sin(\mu \ln x) \end{cases}$$

لنطبق محدد رونسكي:

$$W\left[x^\lambda \cdot \cos(\mu \ln x) , x^\lambda \cdot \sin(\mu \ln x)\right] = \mu x^{2\lambda - 1} \neq 0 \quad , \quad x > 0$$

الجزء الحقيقي

$$y(x) = c_1 x^{\lambda} \cos(\mu \ln x) + c_2 x^\lambda \sin(\mu \ln x)$$

الجزء التخيلي

مثال:

$$x^2 y'' + x y' + y = 0 \quad , \quad x > 0$$

فرضية أولى

نفرض $y = x^r$ $\Rightarrow y' = r \cdot x^{r-1} \quad , \quad y'' = r(r-1) x^{r-2} \Rightarrow$ نعوض

$$r(r-1)x^r + r \cdot x^r + x^r = 0 \Rightarrow x^r \left[r(r-1) + r + 1 \right] = 0$$

$$\Rightarrow x^r \left[r^2 + 1 \right] = 0 \Rightarrow r_1 = -i \quad , \quad r_2 = +i$$

$$\mu < 0 \quad , \quad \mu < 1$$

$$y(x) = c_1 x^0 \cdot \cos(\ln x) + c_2 x^0 \sin(\ln x) = c_1 \cdot \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x) \quad , \quad x > 0$$

ملخص:

$$L[y] = x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$$

حقيقي $r_1 \neq r_2$ $\quad y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$

حقيقي $r_1 = r_2$ $\quad y(x) = (c_1 + c_2 \ln x) x^{r_1}$

عقديان r_1 , r_2 $\quad y(x) = c_1 x^\lambda \cdot \cos(\mu \ln x) + c_2 x^\lambda \cdot \sin(\mu \ln x)$

حيث إنّ:

$$r_1 = \lambda + i\mu \quad , \quad r_2 = \lambda - i\mu$$

والآن معادلة أولر بشكلها النظامي من أجل $x=x_0$ نقطة شاذة نظامية

$$(x-x_0)^2 y'' + \alpha (x-x_0) y' + \beta y = 0$$

حقيقي $r_1 \neq r_2$ و $y(x) = c_1 . |x-x_0|^{r_1} + c_2 . |x-x_1|^{r_2}$

حقيقي $r_1 = r_2$ و $y(x) = (c_1 + c_2 \ln|x-x_0|) . |x-x_0|^2$

عقدية r_1 , r_2 و $y(x) = c_1 . |x-x_0|^{\lambda} . \cos(\mu \ln|x-x_0|)$
$+ c_2 \, x^{\lambda} \sin(\mu \ln|x-x_0|)$

$$r_1 = \lambda + i\mu \quad , \quad r_2 = \lambda - i\mu$$

$z = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$ قطب بسيط لكل من $a(z)$ و $b(z)$ فهي نقطة شاذة منتظمة.

مثال (٢):

أعد نفس السؤال من أجل:

$$z^2 (z-z)^2 w'' + z(1-z)(1-2z) w' - w = 0$$

الحل:

$$w'' + \frac{z(1-z)(1-2z)}{z^2(1-z)^2} w' - \frac{1}{z^2(1-z)^2} w = 0$$

أو بالشكل:

$$w'' + \frac{1-2z}{z(1-z)} w' - \frac{1}{z^2(1-z)^2} w = 0$$

نلاحظ أن $z = 0$ قطب بسيط بالنسبة لأمثال w'، وقطب ثنائي بالنسبة لأمثال w فهي نقطة شاذة منتظمة.

كذلك نجد أن $z = 1$ قطب بسيط بالنسبة لأمثال w' وقطب ثنائي بالنسبة لأمثال w فهي نقطة شاذة منتظمة أما بقية النقاط فهي نقاط عادية.

مثال (٣):

ابحث في الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$2z(z+1) w'' + 3(z+1) w' - w = 0$$

في جوار $z = 0$.

الحل:

نضرب طرفي المعادلة المفروضة بـ z:

$$2z^2(z+1) w'' + 3z(z+1) w' - z w = 0$$

$$w'' + \frac{3z(z+1)}{2z^2(z+1)} w' - \frac{z}{2z^2(z+1)} w = 0$$

$$w'' + \frac{3}{2z} w' - \frac{1}{2z(z+1)w = 0}$$

$z = 0$ قطب بسيط لأمثال w'

$z = 0$ قطب بسيط لأمثال $w \Leftarrow z = 0$ نقطة شاذة منتظمة

بما أن $z = 0$ نقطة شاذة منتظمة نبحث عن حل على شكل متسلسلة صحيحة معممة من النمط:

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda} \quad , \quad c_0 \neq 0$$

$$w' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda) c_k z^{k+\lambda-1}$$

$$w'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^{k+\lambda-2}$$

نعوض بالمعادلة:

$$2z^2(z+1) \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^{k+\lambda-2} + 2z(z+1) \sum_{0}^{\infty} (k+\lambda) c_k z^{k+\lambda-1}$$

$$- z \sum_{0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow (2z^3 + 2z^2) \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^{k+\lambda-2}$$

$$(3z^2 + 3z) \sum_{0}^{\infty} (k+\lambda) c_k z^{k+\lambda-1} - z \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{0}^{\infty} 2(k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^{k+\lambda+1} + \sum_{0}^{\infty} 2(k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^{k+\lambda}$$

$$+\sum_0^\infty 3(k+\lambda)c_k z^{k+\lambda+1} + \sum_0^\infty 3(k+\lambda)c_k z^{k+\lambda} - \sum_0^\infty c_k z^{k+\lambda} = 0$$

نقسم على z^λ:

$$\Rightarrow \sum_0^\infty 2(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+1} + \sum_0^\infty 2(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^k$$
$$+\sum_0^\infty 3(k+\lambda)c_k z^{k+1} + \sum_0^\infty 3(k+\lambda)c_k z^k - \sum_0^\infty c_k z^{k+1} = 0$$

والآن هدفنا كتابة المعادلة الدليلية:

نقوم بالمطابقة نأخذ أصغر أس موجود «أمثال الحد الثابت»:

z^0: $2\lambda(\lambda-1)c_0 + 3\lambda c = 0$

$[2\lambda(\lambda-1) + 3\lambda]c_0 = 0 \quad ; \quad c_0 \neq 0$

$2\lambda^2 - 2\lambda + 3\lambda = 0$

$2\lambda^2 + \lambda = 0$

$\lambda(2\lambda+1) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = -1/2$

نلاحظ أن $\lambda_1 - \lambda_2 \notin Z$ ونحن في الحالة الأولى.

لدينا:

$$a_1(z) = z\,a(z) \Rightarrow a_1(z) = z \cdot \frac{3}{2z} \Rightarrow a_1(z) = \frac{3}{2} \Rightarrow a_1(0) = c_0 = \frac{3}{2}$$

$$b_1(z) = z^2 b(z) \Rightarrow b_1(z) = z^2\left(\frac{-1}{2z(z+1)}\right) = \frac{-z}{2z+2}$$

$$\Rightarrow b_1(0) = d_0 = 0$$

لكن نعلم أن الشكل العام للمعادلة الدليلية:

$$\lambda(\lambda-1) + \lambda c_0 + d_0 = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1) + \frac{3}{2}\lambda + 0 = 0$$
$$2\lambda(\lambda - 1) + 3 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = -1/2 \quad ; \quad \lambda_1 - \lambda_2 \notin Z$$

والآن نتابع عملية المطابقة:

نلاحظ وجود الأس $k + 1$ في بعض حدود المعادلة لذلك نعوض كل k بـ $k - 1$:

$$z^k : 2(k + \lambda - 1)(k + \lambda - 2)\, c_{k-1} + 2(k + \lambda)(k + \lambda - 1)\, c_k$$
$$+ 3(k + \lambda - 1)\, c_{k-1} + 3(k + \lambda)\, c_k - c_{k-1} = 0 \quad ; \quad k \geq 1$$
$$[2(k + \lambda)(k + \lambda - 1) + 3(k + \lambda)]\, c_k + [2(k + \lambda - 1)(k + \lambda - 2 + 3(k + \lambda - 1) - 1]\, c_{k-1} = 0$$
$$(k + \lambda)(2k + 2\lambda - 2 + 3)\, c_k + [(k + \lambda - 1)(2k + 2\lambda - 4 + 3) - 1]\, c_{k-1} = 0 \quad ; \quad k \geq 1$$
$$(k + \lambda)(2k + 2\lambda + 1)\, c_k = -[(k + \lambda - 1)(2k + 2\lambda - 1) - 1]\, c_k \quad (*)$$

ملاحظة: بدأنا العداد $k \geq 1$ لأنه من أجل $k = 0$ أوجدنا المعادلة الدليلية من بعض الحدود والبعض الآخر عوضنا بدل k بـ $k - 1$ وأصبح $k \geq 1$ والآن من أجل الجذر الأول يكون لدينا:

$$\text{for } \lambda_1 = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} k(2k + 1)\, c_k = -[(k - 1)(2k - 1) - 1]\, c_{k-1}$$
$$= -[2k^2 - k - 2k + 1 - 1]\, c_{k-1}$$
$$= -[2k^2 - 3k]\, c_{k-1}$$
$$k(2k + 1)\, c_k = -k(2k - 3)\, c_{k-1} \quad ; k \geq 1$$
$$\Rightarrow c_k = -\frac{2k - 3}{2k + 1} c_{k-1} \quad ; \quad k \geq 1$$
$$k = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{3}\, c_0$$
$$k = 2 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{5}\, c_1$$

$$k = 3 \Rightarrow c_3 = -\frac{3}{7}c_2$$

$$k = 4 \Rightarrow c_4 = -\frac{5}{9}c_3$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\forall K = k \Rightarrow c_k = -\frac{2k-3}{2k+1}c_{k-1} \quad ; \quad k \geq 1$$

نضرب العلاقات طرفاً لطرف فنجد:

$$c_k = \frac{(1)(-1)(-3)(-5)(-7).....-(2k-3)c_0}{(3)(5)(7)(9)(11)...(2k-3)(2k-1)(2k+1)}$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)(2k+1)}c_0$$

ومنه الحل الأول:

$$w_1 = \sum c_k z^{k+\lambda_1}$$

$$w_1 = z^{\lambda_1}\sum c_k z^k = z^0 \sum_0^\infty c_k z^k \quad ; \quad c_0 \neq 0$$

$$w_1 = \sum_0^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)(2k+1)}c_0 z^k \quad ; \quad c_0 \neq 0$$

c_0 ثابت كيفي نختاره $c_0 = 1$.

ومنه:

$$w_1 = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)(2k+1)}z^k$$

والآن من أجل الجذر الثاني:

$$\text{For } \lambda_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow (k-\frac{1}{2})(2k-1+1)c_k =$$

$$= -\left[(k-\frac{1}{2}-1)(2k-1-1)-1\right]c_{k-1}$$

$$\Rightarrow 2k(k-\frac{1}{2})c_k = \left[2k^2-3k-2k+3-1\right]c_{k-1}$$

$$= \left[2k^2-5k+2\right]c_{k-1}$$

$$\Rightarrow k(2k-1)c_k = -(k-2)(2k-1)c_{k-1}$$

$$\Rightarrow kc_k = -(k-2)c_{k-1}$$

$$\Rightarrow c_k = -\frac{k-2}{k}c_{k-1} \quad ; \quad k \geq 1$$

$$k=1 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{1}\,c_0 = c_0$$

$$k=2 \Rightarrow c_2 = \frac{0}{2}\,c_1 = 0$$

$$k=3 \Rightarrow c_3 = 0$$

$$\vdots$$

$$\forall K = K \Rightarrow c_k = 0$$

ومنه:

$$w_2 = \sum_0^\infty c_k z^{k+\lambda_2} = z^{\lambda_2}\sum_{k=0}^\infty c_k z^k = z^{-\frac{1}{2}}\left[c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_k z^k + ..\right]$$

$$= z^{-\frac{1}{2}}\left[c_0 + c_0 z + 0 + 0 + 0 + \ldots..\right] = z^{-\frac{1}{2}}\left[1+z\right] \quad ; \quad c_0 = 1$$

وهو الحل الخاص الثاني.

ومن ثمّ يكون الحل العام هو: $w = Aw_1 + Bw_2$ (تركيب خطي من الحلين)