

قد نتنازع المحاضرة السابقة عن مفهوم المورفيزم، الأبيومورفيزم...  
 مثالاً عنها:

سؤال: لتكن فئة المودولات اليسارية فوق الحلقة الواحدة R، نرمزها  $\mathcal{L}_R$  mod R،  
 وليكن  $u: A \rightarrow B$  مورفيزم لفئة  $\mathcal{L}_R$  حيث  $A, B \in \text{ob}(\mathcal{L}_R)$ ،  
 الشروط الآتية متكافئة:

- ١- u مورفيزم
- ٢- u متباين
- ٣- البرهان: (١)  $\Rightarrow$  (٢)، لنعرض أن u مورفيزم عندئذ:

$\forall X \in \text{ob}(\mathcal{L}_R)$ ؛  
 فإن التطبيق  $\varphi: \mathcal{L}(X, A) \rightarrow \mathcal{L}(X, B)$   
 $\varphi(f) = u \cdot f \quad \forall f \in \mathcal{L}(X, A)$   
 متباين.

لنفرض أولاً أن u غير متباين، عندئذ  $\ker(u) \neq 0$  لشيء  $N = \ker(u)$   
 فيكون N مودول جزئي من A،  
 مخر المودول

ان  $N \in \text{ob}(\mathcal{L}_R)$ ، لأنه مودول  $\mathcal{L}_R$ .  
 يكون التطبيق  $\varphi: \mathcal{L}(N, A) \rightarrow \mathcal{L}(N, B)$   
 المعروف بالمثل:  $\varphi(f) = u \cdot f \quad \forall f \in \mathcal{L}(N, A)$   
 متبايناً،  
 ليعرف التماثلات:

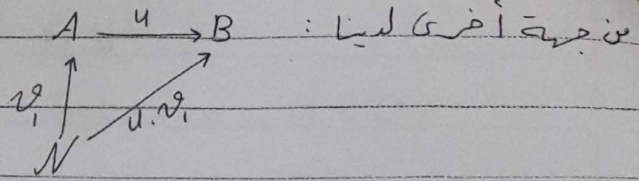
التكامل الآتي:

$$\varphi_1: N \rightarrow A \quad \forall x \in N \quad \varphi_1(x) = 0$$

$$\varphi_2: N \rightarrow A \quad \forall x \in N \quad \varphi_2(x) = x$$

$$v_1 \neq v_2$$

أخيراً :



أي  $u \cdot v_1, u \cdot v_2 \in \mathcal{L}(N, B)$

حسب تعريف  $u$ ، لتأخذ الصورة المباشرة لـ  $v_1, v_2$  :

$$u(v_1) = u \cdot v_1$$

$$u(v_2) = u \cdot v_2$$

ولدينا :  $x \in N$

$$u \cdot v_1(x) = u(v_1(x)) = u(0) = 0$$

تأمل كل  $x \in N$ ، حسب تعريف  $v_1$

$$u \cdot v_2(x) = u(v_2(x)) = u(x) = 0$$

لأن  $x \in N = \ker(u)$  حسب تعريف  $v_2$

$$\Rightarrow u \cdot v_1(x) = u \cdot v_2(x)$$

$$u \cdot v_1 = u \cdot v_2$$

$$u(v_1) = u(v_2)$$

$$v_1 = v_2$$

حسب تعريف  $u$  :

دعنا  $u$  متباين :

وهذا تناقض، وبالتالي التطبيق  $u$  متباين.

إثبات من (2) إلى (1) : لنفرض أن  $u$  متباين، ونفرض جديلاً أن  $u$  ليس متبايناً

$$u : \mathcal{L}(X, A) \rightarrow \mathcal{L}(X, B)$$

عكسي

$$u(f) = u \cdot f \quad \forall f \in \mathcal{L}(X, A)$$

المعرف بالمثل

عكسي يوجد  $v_1, v_2 \in \mathcal{L}(X, A)$  حيث  $v_1 \neq v_2$  وأن  $u(v_1) = u(v_2)$

أي : بما أننا فرضنا  $u$  غير متباين، فنوجد عنصرين من النطاق غير متساويين ويكون  
الصورتان متساويتين.

وبالتالي  $u$  غير تعريف  $u$  جد :

$$\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$$

$$u \cdot v_1 = u \cdot v_2 \text{ عن طريق}$$

$$\forall x \in X; u \cdot v_1(x) = u \cdot v_2(x)$$

$$u(v_1(x) - v_2(x)) = 0 \quad \text{بإحداث النظر إلى الضربين :}$$

$$v_1(x) - v_2(x) \in \ker(u) = 0$$

لأن  $u$  متباين

$$\Rightarrow v_1(x) = v_2(x) \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2$$

وهذا يناقض التالي وهو متباين و  $u$  هو تحويل

(11)

(11)

الدالة هي علاقة بين الفئات

لتكن  $d_1, d_2$  فئتين، نقول أنه يوجد لدينا  $d_1$  مباشر (موافقه للتغير)

$$F: d_1 \rightarrow d_2$$

$$F: \text{ob}(d_1) \rightarrow \text{ob}(d_2)$$

$$\forall A \in \text{ob}(d_1), F(A) \in \text{ob}(d_2)$$

إدراوحد :

1- تطبيقه أشياء :

حيته :

2- تطبيقه صورضيمات :

$$F: \text{Mor}(d_1) \rightarrow \text{Mor}(d_2)$$

حيته: لأط كل صورضيم  $u: A \rightarrow B$  للفئة  $d_1$  فإن :

$$F(u): F(A) \rightarrow F(B) \text{ صورضيم للفئة } d_2$$

$$\forall A, B \in \text{ob}(d_1)$$

وبالتالي :

$$F_{A,B}: d_1(A, B) \rightarrow d_2(F(A), F(B))$$

فصان ما الشرط الآتية :

$\forall A \in \text{ob}(\mathcal{L}_1) ; F(I_A) = I_{F(A)}$  1  
 $\forall u, v \in \text{Mor}(\mathcal{L}_1) ; F(v \circ u) = F(v) \circ F(u)$  2

دفعله أنت يوم لينا دال غير مباشر (والف للتير)

$F: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$

$F: \text{ob}(\mathcal{L}_1) \rightarrow \text{ob}(\mathcal{L}_2)$   
 $A \rightarrow F(A)$

1- تطيقه أشياء :

$F: \text{Mor}(\mathcal{L}_1) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{L}_2)$

$u: A \rightarrow B \in \mathcal{L}_1(A, B)$

$F(u): F(B) \rightarrow F(A) \in \text{Mor}(\mathcal{L}_2)$

2- تطيقه مورفيزمات :  
 خيته لا جبل كل مورفيزم  
 فان  
 و بحققان ميا :

$\forall A \in \text{ob}(\mathcal{L}_1) ; F(I_A) = I_{F(A)}$  1  
 $\forall u, v \in \text{Mor}(\mathcal{L}_1) ; F(v \circ u) = F(v) \circ F(u)$  2

تمهيد : ليكن  $X \in \text{ob}(\mathcal{L})$  دال كل  $X \in \text{ob}(\mathcal{L})$  يوم

$h_x: \mathcal{L} \rightarrow \text{Set's}$

1- دالو مباشر

$\hat{h}_x: \mathcal{L} \rightarrow \text{Set's}$

2- دالو غير مباشر

البرهان : (1)

لغرف  $h_x: \mathcal{L} \rightarrow \text{Set's}$  من خلال :

$h_x: \text{ob}(\mathcal{L}) \rightarrow \text{ob}(\text{Set's})$

تطيقه أشياء

$\forall A \in \text{ob}(\mathcal{L}) ; h_x(A) = \mathcal{L}(X, A)$

$A = B ; \mathcal{L}(X, A) = \mathcal{L}(X, B)$

إذا أختنا :

$h_x: \text{Mor}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Mor}(\text{Set})$  : تطبيق المورفيزمات

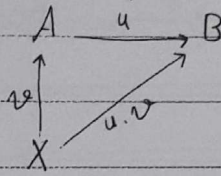
لاجل كل مورفيزم  $u: A \rightarrow B$  لنضع

$$h_x(u): h_x(A) \rightarrow h_x(B)$$

$$h_x(u): \mathcal{L}(X, A) \rightarrow \mathcal{L}(X, B)$$

$$h_x(u)(v) = u \cdot v \quad \text{لأن}$$

لانحن نقطة لانتا تركيب تطبيقات



وغير وضوحاً أن:  $h_x(u)$  تطبيقه (لأننا اذا أخذنا عنصرين من المنطقتين متساويين ستكون الصور لهما متساوية)

لنتحقق من الشرطين:

1- ليكن  $(A \in \text{ob}(\mathcal{A}))$  ان  $h_x(I_A): h_x(A) \rightarrow h_x(A)$

$$h_x(I_A): \mathcal{L}(X, A) \rightarrow \mathcal{L}(X, A)$$

$$\forall v \in \mathcal{L}(X, A); h_x(I_A)(v) = I_A \cdot v = v$$

هو القوية المطابقة، ومنه في

$$h_x(I_A) = I_{\mathcal{L}(X, A)} = I_{h_x(A)}$$

2- ليكن  $v \circ u: A \rightarrow D$   $u: A \rightarrow B$ ,  $v: B \rightarrow D$

$$h_x(v \circ u): h_x(A) \rightarrow h_x(D)$$

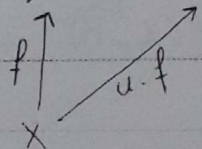
$$h_x(v \circ u): \mathcal{L}(X, A) \rightarrow \mathcal{L}(X, D)$$

$$\forall f \in \mathcal{L}(X, A); h_x(v \circ u)(f) = (v \circ u) \cdot f = v \cdot (u \cdot f)$$

$$h_x(v) = h_x(B) \rightarrow h_x(D) \quad \text{لأن}$$

$$h_x(v): \mathcal{L}(X, B) \rightarrow \mathcal{L}(X, D)$$

ان  $u \cdot f \in \mathcal{L}(X, B)$  لأن  $A \xrightarrow{u} B$



$$h_x(v)(u \cdot f) = v \cdot (u \cdot f)$$

بالتالي

$$h_x(u) : h_x(A) \rightarrow h_x(B)$$

$$: \mathcal{L}(X, A) \rightarrow \mathcal{L}(X, B)$$

بالتالي

$$\forall f \in \mathcal{L}(X, A) : h_x(u)(f) = u \cdot f$$

بالتالي

$$h_x(v \cdot u)(f) = h_x(v)(u \cdot f)$$

$$= h_x(v)(h_x(u)(f))$$

$$= (h_x(v) \cdot h_x(u))(f)$$

$$\Rightarrow h_x(v \cdot u) = h_x(v) \cdot h_x(u)$$

وبالتالي ان تحقق كل الشروط يكون  $h_x$  دالة مباشرة

برهان (2):

$$h_x : \mathcal{L} \rightarrow \text{Set's}$$

لنرى

$$h_x : \text{ob}(\mathcal{L}) \rightarrow \text{ob}(\text{Set's})$$

تطبيقه

$$\forall A \in \text{ob}(\mathcal{L}), h_x(A) = \mathcal{L}(A, X)$$

$$h_x : \text{Mor}(\mathcal{L}) \rightarrow \text{Mor}(\text{Set's})$$

تطبيقه

$$u : A \rightarrow B$$

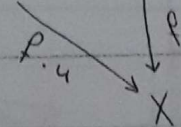
ليكن

$$h_x(u) : h_x(B) \rightarrow h_x(A)$$

لتفحص:

$$: \mathcal{L}(B, X) \rightarrow \mathcal{L}(A, X)$$

$$\forall f \in \mathcal{L}(B, X), h_x(u)(f) = f \cdot u$$



لتحقق من الشرطين:

1- ليكن  $A \in \text{ob}(\mathcal{L})$  ان

$$h_x(I_A) : h_x(A) \rightarrow h_x(A)$$

$$: \mathcal{L}(A, X) \rightarrow \mathcal{L}(A, X)$$

$$\forall f \in \mathcal{L}(A, X), \hat{h}_x(I_A)(f) = f \cdot I_A = f$$

هو التطبيق الطبيعي، وهو

$$\hat{h}_x(I_A) = I_{\mathcal{L}(A, X)} = I_{\hat{h}_x(A)}$$

$$\forall u: A \rightarrow D \leftarrow u: A \rightarrow B, v: B \rightarrow D \quad \text{البيان 2}$$

$$\hat{h}_x(v \circ u): \hat{h}_x(D) \rightarrow \hat{h}_x(A) \quad \text{لأنه}$$

$$: \mathcal{L}(D, X) \rightarrow \mathcal{L}(A, X)$$

$$\forall f \in \mathcal{L}(D, X); \hat{h}_x(v \circ u)(f) = f \cdot (v \circ u) = (f \cdot v) \cdot u$$

$$\hat{h}_x(v): \hat{h}_x(D) \rightarrow \hat{h}_x(B) \quad \text{لأنه}$$

$$: \mathcal{L}(D, X) \rightarrow \mathcal{L}(B, X)$$

$$\hat{h}_x(v)(f) = f \cdot v$$

$$\hat{h}_x(u): \hat{h}_x(B) \rightarrow \hat{h}_x(A) \quad \text{لأنه}$$

$$: \mathcal{L}(B, X) \rightarrow \mathcal{L}(A, X)$$

$$f \cdot v \in \mathcal{L}(B, X)$$

$$(*) \hat{h}_x(u)(f \cdot v) = (f \cdot v) \cdot u \quad \text{لأنه } \hat{h}_x(v \circ u)$$

$$\hat{h}_x(v \circ u)(f) = (f \cdot v) \cdot u = \hat{h}_x(u)(f \cdot v)$$

$$\hat{h}_x(u) \circ \hat{h}_x(v) = \hat{h}_x(u)(\hat{h}_x(v)(f)) = (\hat{h}_x(u) \cdot \hat{h}_x(v))(f)$$

$$\Rightarrow \hat{h}_x(v \circ u) = \hat{h}_x(u) \cdot \hat{h}_x(v)$$

انتبه الملاحظ