القسم: الرياضيات التطبيقية السنة: الرابعة المحاضرة: الثالثة

المادة: تطبيقات نظرية الفئات الدكتور: حمزة الحاكمي التاريخ: يوم: ١٤/ ٣/ ٢٠١٧

تحدثنا في المحاضرة السابقة عن مفهوم المونومورفيزم و الإبيمورفيزم وسنورد مثالاً عنهما:

مثال: لتكن $\mathcal{L}$ فئة المودولات اليسارية فوق الحلقة الواحدية R، ونرمز لها $_R\mathcal{L}$ أو $R\text{-mod}$،

وليكن $u: A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $_R\mathcal{L}$ حيث: $A, B \in ob(_R\mathcal{L})$

الشروط الآتية متكافئة:

1- u مونومورفيزم

2- u متباين.

البرهان: $(1) \Longrightarrow (2)$، لنفرض أن u مونومورفيزم عندئذ:

$\forall X \in ob(_R\mathcal{L})$;

فإن التطبيق $\alpha: \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,B)$

$\alpha(f) = u.f \quad ; \forall f \in \mathcal{L}(X,A)$

متباين.

لنفرض جدلاً أن u غير متباين، عندئذ $ker(u) \neq 0$ (صفر المودول) لنسمي $N = ker(u)$

فيكون N مودول جزئي من A، أي أن $N \in ob(_R\mathcal{L})$، لأنه مودول على R.

يكون التطبيق: $\alpha: \mathcal{L}(N,A) \longrightarrow \mathcal{L}(N,B)$

المعرف بالشكل: $\alpha(f) = u.f \quad \forall f \in \mathcal{L}(N,A)$

متبايناً.

تذكرة: ليكن $u: A \longrightarrow B$، u متباين إذا كان: $ker(u) = \{0\}$

لنعرف التشاكلات: $v_1, v_2 : N \longrightarrow A$ أي أن $v_1, v_2 \in \mathcal{L}(N,A)$

بالشكل الآتي:

$v_1(x) = 0 \quad \forall x \in N$

$v_2(x) = x \quad \forall x \in N$

أخيراً أن : $v_1 \neq v_2$

من جهة أخرى لدينا : $A \xrightarrow{u} B$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "u"] & B \\ N \arrow[u, "v_1"] \arrow[urr, "u.v_1"'] & & \end{tikzcd}$$

أي $u.v_1 , u.v_2 \in \mathcal{L}(N, B)$

حسب تعريف φ، لنأخذ الصورة المباشرة لـ v_1 , v_2 :

$\varphi(v_1) = u.v_1$

$\varphi(v_2) = u.v_2$

ولدينا : $\forall x \in N$;

$u.v_1(x) = u(v_1(x)) = u(0) = 0$

حسب تعريف $v_1(x)$. تشاكل زمري يصور كل حيادي بحيادي

$u.v_2(x) = u(v_2(x)) = u(x) = 0$

حسب تعريف $v_2(x)$ كون $x \in N = \ker(u)$

$\Rightarrow \quad u.v_1(x) = u.v_2(x)$

$u.v_1 \Rightarrow u.v_2$

حسب تعريف φ : $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$

وطالما φ متباين : $v_1 = v_2$

وهذا تناقض، وبالتالي التطبيق u متباين.

إثبات من (2) إلى (1) : لنفرض أن u متباين ولنفرض جدلاً أن φ ليس متبايناً

عندئذٍ . $\varphi : \mathcal{L}(X, A) \longrightarrow \mathcal{L}(X, B)$

المعرف بالشكل $\varphi(f) = u.f \quad \forall f \in \mathcal{L}(X, A)$

عندئذٍ يوجد $v_1 , v_2 \in \mathcal{L}(X, A)$ بحيث : $v_1 \neq v_2$ وأن $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$

أي : بما أننا فرضنا φ غير متباين فيوجد عنصرين من المنطلق غير متساويين ويكون الصور لهما متساوية.

وبالتالي حسب تعريف φ نجد :

$$v(v_1) = v(v_2)$$

عندئذٍ: $u.v_1 = u.v_2$

$$\forall x \in X \;;\; u.v_1(x) = u.v_2(x)$$

بإضافة النظير إلى الطرفين: $u\underbrace{(v_1(x) - v_2(x))} = 0$

$$v_1(x) - v_2(x) \in \ker(u) = 0$$

لأن u متباين.

$$\Rightarrow v_1(x) = v_2(x) \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2$$

وهذا تناقض وبالتالي v متباين و u مونومورفيزم.

الدوال

الدوال هي علاقة بين الفئات.

لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ فئتين، نقول إنه يوجد لدينا دالي مباشر (موافقة للتغير)

$$F : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$$

إذا وجد:

1. تطبيق أشياء: $F : ob(\mathcal{L}_1) \longrightarrow ob(\mathcal{L}_2)$

بحيث: $\forall A \in ob(\mathcal{L}_1) \,,\, F(A) \in ob(\mathcal{L}_2)$

2. تطبيق مورفيزمات:

$$F : Mor(\mathcal{L}_1) \longrightarrow Mor(\mathcal{L}_2)$$

بحيث: لأجل كل مورفيزم $u : A \longrightarrow B$ للفئة $\mathcal{L}_1$ فإن:

$F(u) : F(A) \longrightarrow F(B)$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_2$

وبالتالي: $\forall A, B \in ob(\mathcal{L}_1)$

فإنه يوجد: $F_{A,B} : \mathcal{L}_1(A, B) \longrightarrow \mathcal{L}_2(F(A), F(B))$

ويحققان الشروط الآتية:

1- $\forall A \in ob(\mathcal{L}_1) \; ; \; F(I_A) = I_{F(A)}$

2- $\forall u, v \in Mor(\mathcal{L}_1) \; ; \; F(v.u) = F(v) . F(u)$

ونقول أنه يوجد لدينا دالي غير مباشر (دالف للتغير).

$$F : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$$

إذا وجد:

1- تطبيق أشياء:

$$F : ob(\mathcal{L}_1) \longrightarrow ob(\mathcal{L}_2)$$
$$A \longrightarrow F(A)$$

2- تطبيق مورفيزمات:

$$F : Mor(\mathcal{L}_1) \longrightarrow Mor(\mathcal{L}_2)$$

بحيث لأجل كل مورفيزم:

$$u : A \longrightarrow B \in \mathcal{L}_1(A, B)$$

فإن:

$$F(u) : F(B) \longrightarrow F(A) \in Mor(\mathcal{L}_1)$$

ويحققان معاً:

1- $\forall A \in ob(\mathcal{L}_1) \; ; \; F(I_A) = I_{F(A)}$

2- $\forall u, v \in Mor(\mathcal{L}_1) ; \; F(u.v) = F(v) . F(u)$

تمهيدية: لتكن $\mathcal{L}$ فئة عشنية لأجل كل $X \in ob(\mathcal{L})$ يوجد:

1- دالي مباشر $h_X : \mathcal{L} \longrightarrow Set's$

2- دالي غير مباشر $\hat{h}_X : \mathcal{L} \longrightarrow Set's$

البرهان: (1)

لنعرف $h_X : \mathcal{L} \longrightarrow Set's$ من خلال:

- تطبيق أشياء $h_X : ob(\mathcal{L}) \longrightarrow ob(Set's)$

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}) \; , \; h_X(A) = \mathcal{L}(X, A)$$

إذا أخذنا: $A = B \; ; \; \mathcal{L}(X, A) = \mathcal{L}(X, B)$

(Mob; 0944-879460 / Pho: 011-2151436) خدمات كلية العلوم - دمشق حرم كلية العلوم

تطبيق المورفيزمات : $h_X : Mor(\mathcal{L}) \longrightarrow Mor(Sets)$

لأجل كل مورفيزم $u : A \longrightarrow B$ لنضع :

$$h_X(u) : h_X(A) \longrightarrow h_X(B)$$

$$h_X(u) : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,B)$$

$$h_X(u)(v) = u.v$$ لأنه

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] & B \\ X \arrow[u, "v"] \arrow[ur, "u.v"'] & \end{tikzcd}$$

لا نضع نقطة لأننا نركب تطبيقات

ونجد وضوحاً أن : $h_X(u)$ تطبيق (لأننا إذا أخذنا عنصرين من المنطلق متساويين ستكون الصور لها متساوية)

لنتحقق من الشرطين :

1- ليكن $A \in ob(\mathcal{L})$ ، إن : $h_X(I_A) : h_X(A) \longrightarrow h_X(A)$

$$h_X(I_A) : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,A)$$

$$\forall v \in \mathcal{L}(X,A) \ ; \ h_X(I_A)(v) = I_A . v = v$$

هو التطبيق المطابق ، ومنه :

$$h_X(I_A) = I_{\mathcal{L}(X,A)} = I_{h_X(A)}$$

2- ليكن $u : A \longrightarrow B$ ، $v : B \longrightarrow D$ ⟸ $v.u : A \longrightarrow D$

لنأخذ : $h_X(v.u) : h_X(A) \longrightarrow h_X(D)$

$$h_X(v.u) : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,D)$$

$$\forall f \in \mathcal{L}(X,A) \ ; \ h_X(v.u)(f) = (v.u).f = v.(u.f)$$

لنأخذ : $h_X(v) = h_X(B) \longrightarrow h_X(D)$

$$h_X(v) : \mathcal{L}(X,B) \longrightarrow \mathcal{L}(X,D)$$

إن $u.f \in \mathcal{L}(X,B)$ لأن :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] & B \\ X \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "u.f"'] & \end{tikzcd}$$

وبالتالي:

$$h_X(v)(u.f) = v.(u.f)$$

ولنأخذ:

$$h_X(u) : h_X(A) \longrightarrow h_X(B)$$
$$: \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,B)$$

$$\forall f \in \mathcal{L}(X,A) : \quad h_X(u)(f) = u.f$$

وبالتالي نجد:

$$h_X(v.u)(f) = h_X(v)(u.f)$$
$$= h_X(v)(h_X(u)(f))$$
$$= (h_X(v).h_X(u))(f)$$
$$\Rightarrow h_X(v.u) = h_X(v).h_X(u)$$

وبالتالي أن تحقق كل الشروط يكون h_X دالي مباشر

برهان (2):

لنعرف $\hat{h}_X : \mathcal{L} \longrightarrow Set's$ من خلال:

- تطبيق أشياء: $\hat{h}_X : ob(\mathcal{L}) \longrightarrow ob(Set's)$

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}) , \quad \hat{h}_X = \mathcal{L}(A,X)$$

- تطبيق مورفيزمات: $\hat{h}_X : Mor(\mathcal{L}) \longrightarrow Mor(Set's)$

ليكن $u : A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة

لنضع:

$$\hat{h}_X(u) : \hat{h}_X(B) \longrightarrow \hat{h}_X(A)$$
$$: \mathcal{L}(B,X) \longrightarrow \mathcal{L}(A,X)$$

$\forall f \in \mathcal{L}(B,X) \; ; \; \hat{h}_X(u)(f) = f.u$ لأنه

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f.u"'] & B \arrow[d, "f"] \\ & X \end{tikzcd}$$

للتحقق من الشرطين:

1- ليكن $A \in ob(\mathcal{L})$ إن:

$$\hat{h}_X(I_A) : \hat{h}_X(A) \longrightarrow \hat{h}_X(A)$$
$$\mathcal{L}(A,X) \longrightarrow \mathcal{L}(A,X)$$

$\forall f \in \mathcal{L}(A,X) \; ; \; \hat{h}_X(I_A)(f) = f \cdot I_A = f$

هو التطبيق المطابق ، ومنه :

$$\hat{h}_X(I_A) = I_{\mathcal{L}(A,X)} = I_{\hat{h}_X(A)}$$

2- ليكن $u : A \longrightarrow B \; , \; v : B \longrightarrow D \;\Rightarrow\; v \cdot u : A \longrightarrow D$

لنأخذ : $\hat{h}_X(v \cdot u) : \hat{h}_X(D) \longrightarrow \hat{h}_X(A)$

$: \mathcal{L}(D,X) \longrightarrow \mathcal{L}(A,X)$

$\forall f \in \mathcal{L}(D,X) \; ; \; \hat{h}_X(v \cdot u)(f) = f \cdot (v \cdot u) = (f \cdot v) \cdot u$

ولنأخذ : $\hat{h}_X(v) : \hat{h}_X(D) \longrightarrow \hat{h}_X(B)$

$: \mathcal{L}(D,X) \longrightarrow \mathcal{L}(B,X)$

$\hat{h}_X(v)(f) = f \cdot v$

ولنأخذ : $\hat{h}_X(u) : \hat{h}_X(B) \longrightarrow \hat{h}_X(A)$

$: \mathcal{L}(B,X) \longrightarrow \mathcal{L}(A,X)$

$f \cdot v \in \mathcal{L}(B,X)$

$(*) \quad \hat{h}_X(u)(f \cdot v) = (f \cdot v) \cdot u$ حسب تعريف : $h_X(v \cdot u)$

$\hat{h}_X(v \cdot u)(f) = (f \cdot v) \cdot u \overset{*}{=} \hat{h}_X(u)(f \cdot v)$

$h_X(u)$ حسب تعريف $= \hat{h}_X(u)\left(\hat{h}_X(v)(f)\right) = \left(\hat{h}_X(u) \cdot \hat{h}_X(v)\right)(f)$

$$\Rightarrow \hat{h}_X(v \cdot u) = \hat{h}_X(u) \cdot \hat{h}_X(v)$$

انتهت المحاضرة .