◄ دكتور المادة: ريم الحاج خليفة

◄ المحاضرة: الثامنة   عنوان المحاضرة: حلقة الخارج

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- تعريف حلقة الخارج (حلقة القسمة).

٢- مبرهنة تخص حلقة الخارج .

تعريف حلقة الخارج (القسمة):

ليكن $\mathcal{R}$ حلقة وليكن A مثالياً في $\mathcal{R}$ عندئذٍ بما أن $\mathcal{R}$ تشكل زمرة تبديلية بالنسبة لعملية الجمع فإن A تشكل زمرة جزئية في $\mathcal{R}$ ونحصل على زمرة الخارج المعرفة بالشكل التالي :

$$\mathcal{R}\backslash A = \{r + A : r \in \mathcal{R}\}$$

حيث أن عناصر زمرة الخارج $\mathcal{R}\backslash A$ تسمى مرافقات يسارية (يمينية) للزمرة الجزئية A في $\mathcal{R}$.

مبرهنة :

ليكن $\mathcal{R}$ حلقة واحدية وَ A مثالياً في $\mathcal{R}$ ولنأخذ المجموعة المعرفة بالشكل :

$$\mathcal{R}\backslash A = \overline{\mathcal{R}} = \{\overline{r} = r + A : r \in \mathcal{R}\}$$

والمعرف عليها عمليتي الجمع (+) والضرب (.) بالشكل الآتي : $\forall\, \overline{x} = x + A, \overline{y} = y + A \in \overline{\mathcal{R}}$

$$\overline{x} + \overline{y} = (x + A) + (y + A) = (x + y) + A = \overline{x + y}$$

$$\overline{x}.\overline{y} = (x + A).(y + A) = (xy) + A = \overline{x.y}$$

عندئذٍ :

١- العمليتين (+) و(.) داخلية (ثنائية) في $\overline{\mathcal{R}}$.

٢- كلاً من العمليتين (+) و (.) كلتاهما معرفة جيداً في $\overline{\mathcal{R}}$.

٣- العملية (+) تبديلية وتجميعية على المجموعة $\overline{\mathcal{R}}$.

٤- المجموعة $\overline{\mathcal{R}}$ تحوي عنصراً محايداً بالنسبة للجمع هو $\overline{0} = 0 + A = A$

٥- لكل عنصر $\overline{x} = x + A \in \overline{\mathcal{R}}$ يوجد نظير للجمع هو $-\overline{x} = (-x) + A \in \overline{\mathcal{R}}$

٦- الثنائية $(\overline{\mathcal{R}}, +)$ زمرة تبديلية .

٧- يوجد في $\overline{\mathcal{R}}$ عنصر محايد للضرب هو $\overline{1} = 1 + A \in \overline{\mathcal{R}}$

٨- عملية الضرب (.) تجميعية في $\overline{\mathcal{R}}$.

٩- عملية الضرب توزيعية على الجمع من اليمين واليسار .

١٠- الثلاثية $(\overline{\mathcal{R}}, +, .)$ حلقة واحدية .

البرهان :

١- واضح من خلال التعريف أن عمليتي (+) و(.) هي عملية داخلية (ثنائية) على $\overline{\mathcal{R}}$.

٢- ليكن $\overline{x},\overline{y},\overline{x_1},\overline{y_1} \in \overline{\mathcal{R}}$ بحيث تحقق : $\overline{x_1}=\overline{y_1}\ \ ,\ \ \overline{x}=\overline{y}$

لكي نثبت بأن عملية الجمع معرفة جيداً يجب أن نبرهن على أن : $\boxed{\overline{x}+\overline{x_1}=\overline{y}+\overline{y_1}}$.

لكي نثبت بأن عملية الضرب معرفة جيداً يجب أن نبرهن على أن : $\boxed{\overline{x}.\overline{x_1}=\overline{y}.\overline{y_1}}$.

بما أن $\overline{x}=\overline{y}$ عندئذٍ $x+A=y+A$ نضيف للطرفين المقدار $(-y+A)$

$$(x+A)+(-y+A)=(y+A)+(-y+A)=(y-y)+A=0+A=A$$
$$\Rightarrow (x-y)+A=A$$

أي أن $x-y\in A$ وبالتالي يوجد $a\in A$ يحقق العلاقة $a=x-y \Leftarrow \boxed{x=a+y}$

وبشكل مشابه أيضاً نلاحظ أنه يوجد $b\in A$ يحقق العلاقة $b=x_1-y_1 \Leftarrow \boxed{x_1=y_1+b}$

والآن لنتحقق من العلاقة سننطلق من طرق لنتوصل للطرف الأخر بخطوات منطقية

$$\overline{x}+\overline{x_1}=(x+A)+(x_1+A)=(x+x_1)+A=\underbrace{(y+a+y_1+b)}_{\text{عوضنا}}$$

سنجمع الحدود أولاً ثم سنجمعها حسب عملية الجمع المعرفة بالمبرهنة

$$=[(y+y_1)+(a+b)]+A=[(y+y_1)+A]+[\underbrace{(a+b)+A}_{\in A}]$$

بما أن هذا المقدار ينتمي إلى A فإننا نستطيع جعلها كلها تساوي A .

$$=[(y+A)+(y_1+A)]+A=(y+A)+(y_1+A)=\overline{y}+\overline{y_1}$$

$\Leftarrow$ عملية الجمع (+) معرفة جيداً

لنبرهن على عملية الضرب أنها معرفة جيداً

$$\overline{x}.\overline{x_1}=(x+A).(x_1+A)=(x.x_1)+A=[(y+a).(y_1+b)]+A$$
$$=[(y.y_1+yb+ay_1+ab)]+A=(yy_1+A)+\left[\underbrace{(yb+ay_1+ab)}_{\in A}+A\right]$$
$$=(yy_1+A)+A=yy_1+A=(y+A)(y_1+A)=\overline{y}+\overline{y_1}$$

$\Leftarrow$ عملية الضرب (.) معرفة جيداً .

٣- ليكن $\overline{x},\overline{y}\in\overline{\mathcal{R}}$ بحيث $\overline{x}=x+A\ ,\overline{y}=y+A$ لنبرهن على أن الجمع تبديلي $\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x}$.

$$\overline{x}+\overline{y}=(x+A)+(y+A)=(x+y)+A=\underbrace{(y+x)}_{\text{لأن } \mathcal{R} \text{ مع الجمع تبديلية}}+A$$
$$=(y+A)+(x+A)=\overline{y}+\overline{x}$$

$\Leftarrow$ عملية الجمع (+) تبديلية .

لنبرهن أنها تجميعية , ليكن $\overline{z}=z+A\in\overline{\mathcal{R}}$

$$(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z}=[(x+A)+(y+A)]+(z+A)=[(x+y)+z]+A$$
$$=[x+(y+z)]+A$$
$$=(x+A)+[(y+z)]+A]=(x+A)+[(y+A)+(z+A)]=\overline{x}+[\overline{y}+\overline{z}]$$

$\Leftarrow$ عملية الجمع (+) تجميعية .

٤- إن $\overline{0} = 0 + A \in \overline{\mathcal{R}}$ فإن $\forall\ \overline{x} = x + A \in \overline{\mathcal{R}}$ فيكون
$$\overline{x} + 0 = (x + A) + (0 + A) = (x + 0) + A = (x + A) = \overline{x}$$
$\Leftarrow$ **0 محايد بالنسبة لعملية الجمع .**

٥- ليكن $\overline{x} = x + A \in \overline{\mathcal{R}}$ ولما كان $x \in \mathcal{R}$ فإن $-x \in \mathcal{R}$: $x + (-x) = 0$ ومنه $-\overline{x} = (-x) + A$
$$\Rightarrow \overline{x} + (-\overline{x}) = (x + A) + (-x + A) = (x - x) + A = 0 + A = \overline{0}$$
$\Leftarrow$ **يوجد في $\overline{\mathcal{R}}$ عنصر نظير .**

٦- الثنائية $(\overline{\mathcal{R}}, +)$ زمرة تبديلية محققة وذلك حسب الشروط السابقة .

٧- بما أن الحلقة $\mathcal{R}$ واحدية فإن $1 \in \mathcal{R}$ وبالتالي $\overline{1} = 1 + A$ وبالتالي
$$\overline{1}.\overline{x} = (1 + A)(x + A) = (1.x) + A = x + A = \overline{x}$$
$$\overline{x}.\overline{1} = (x + A)(1 + A) = (x.1) + A = x + A = \overline{x}$$
$\Leftarrow$ **$\overline{1}$ هو عنصر محايد في $\overline{\mathcal{R}}$.**

٨- لتكن $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \overline{\mathcal{R}}$ عندئذٍ :
$$\overline{x} = x + A\,, \overline{y} = y + A, \overline{z} = z + A$$
$$\begin{aligned}(\overline{x}.\overline{y}).\overline{z} &= [(x + A)(y + A)].(z + A) = [(x.y) + A].(z + A) = ((x.y).z) + A \\ &= \big(x(y.z)\big) + A = (x + A)\big((y.z) + A\big) = (x + A).\big((y + A)(z + A)\big) \\ &= \overline{x}.(\overline{y}.\overline{z})\end{aligned}$$
$\Leftarrow$ **عملية الضرب تجميعية في $\overline{\mathcal{R}}$.**

٩- لتكن $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \overline{\mathcal{R}}$: **سنبرهن أن ضرب توزيعي على الجمع من اليسار .**
$$\begin{aligned}\overline{a}(\overline{b} + \overline{c}) &= (a + A)[(b + A) + (c + A)] = (a + A)[(b + c) + A] = [a(b + c)] + A \\ &= [ab + ac] + A = [(ab) + A] + [(ac) + A] = \overline{ab} + \overline{ac}\end{aligned}$$
سنبرهن أن ضرب توزيعي على الجمع من اليمين .
$$\begin{aligned}(\overline{b} + \overline{c})\overline{a} &= [(b + A) + (c + A)](a + A) = [(b + c) + A](a + A) = [(b + c).a] + A \\ &= [ba + ca] + A = [(ba) + A] + [(ca) + A] = \overline{ba} + \overline{ca}\end{aligned}$$
$\Leftarrow$ **عملية الضرب توزيعية على الجمع من اليمين واليسار .**

١٠- نجد أن الثلاثية $(\overline{\mathcal{R}}, +, .)$ حلقة واحدية محققة من أجل جميع ما سبق .

انتهت المحاضرة

إعداد: لبنى الطون – محمد فهمي القاضي – أحمد ابو التوت