◄ دكتور المادة: هدى الشماط

◄ المحاضرة الثانية عشر   عنوان المحاضرة: تطبيقات الحساب التفاضلي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- نظرية القيمة الوسطى (لتابع لمتغير واحد ، و من ثم لعدة متغيرات مستقلة)

٢-نظرية تايلور لنشر الدوال (تابع لمتحول واحد ، و من ثم تابع لعدة متحولات)

٣- نظرية يونغ

٤-مثال يوضح كيفية نشر تابع لمتحول واحد في منشور تايلور

تطبيقات الحساب التفاضلي للدوال الحقيقة التابعة لعدة متغيرات:

نظرية القيمة الوسطى لمتغير واحد:

لتكن $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$

قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ ومستمرة في النقاط المحيطية هي a,b من $[a,b]$ عندئذٍ نوجد:

$$\mu \in]a,b[\,;\ \varphi(b) - \varphi(a) = (b-a)\varphi'(\mu)$$

حيث μ تحقق إما $a < \mu < b$

أو $\mu = a + \theta(b-a)$ حيث $0 < \theta < 1$

تعميم النظرية :

لتكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

حيث D مجموعة مفتوحة ولتكن $(c+h) \in D$ وC ، و بفرض أن القطعة المستقيمة الواصلة بينهما محتواة في D

فإذا كانت المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ بحيث $i = 1,2,3,\dots,n$ مستمرة على D فإن :

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c + \theta h)$$

حيث $0 < \theta < 1$

و لنربط الرموز القديمة بالرموز الجديدة فنضع :

$c + h = b \quad , \quad c = a$:عندئذٍ

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(a_i + \theta(b_i - a_i)\big)$$

حيث $0 < \theta < 1$

مبرهنة:

لتكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ حيث D مجموعة مفتوحة ومترابطة،

والمشتقات الجزئية من المرتبة الأولى مستمرة و تحقق أن: $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$

عندئذٍ تكون الدالة f ثابتة.

البرهان:

ليكن $a, b \in D$ وبما أن D مجموعة مترابطة فيمكن الوصل بين a, b بخط مضلع يقع بأكمله في D

وليكن هو $L_1, L_2, \dots \dots, L_n$، و رؤوسه هي:

الرمز ,, c^1, c^2 لا نقصد بها قوة و إنما ترقيم و كتبناه في الأعلى لأننا سنضع دليلاً آخر في الأسفل بعد قليل

$$c^0 = a \underbrace{\ ,\ }_{L_1} c^1 \underbrace{\ ,\ }_{L_2} c^2 , \dots \dots , c^{n-1} \underbrace{\quad ,\quad }_{L_n} c^n = b$$

ولنطبق نظرية القيمة الوسطى المعممة على النقطتين a, c^1:

$$f(c^1) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} (c_i^1 - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(a + \theta(c^1 - a)\big) = 0$$

لأن المشتقات معدومة

$$\Rightarrow \ f(c^1) = f(a)$$

وبنفس الطريقة نبرهن أن $f(c^1) = f(c^2)$ وهكذا نجد أن :

$$f(a) = f(c^1) = f(c^2) = \dots \dots = f(c^n) = f(b)$$

أي أن f دالة ثابتة. ((الصورة نفسها لأجل أي عنصرين من المنطلق .. فهي دالة ثابتة))

نظرية تايلور لمتغير واحد:

ليكن

$$\varphi: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

وليكن $[x_0, x_0 + h] \subseteq D$

و لنفرض أن لـ φ مشتقات مستمرة على D من المرتبة $m + 1$ و φ مستمرة في النقاط المحيطية في D،

عندئذٍ:

$$\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)=\frac{\varphi'(x_0)}{1!}h+\frac{\varphi''(x_0)}{2!}h^2+\dots\dots+\frac{\varphi^{(m)}(x_0)}{m!}h^m+R_{m+1}$$

حيث R_{m+1} باقي تايلور ، و يعطى بإحدى الصيغتين التاليتين :

١) صيغة لاغرانج:

$$R_{m+1}=\frac{\varphi^{(m+1)}(x_0+\theta h)}{(m+1)!}h^{m+1}\ ;0<\theta<1$$

٢) صيغة كوشي:

$$R_{m+1}=\frac{h^{m+1}}{(m+1)!}(1-\theta')\varphi^{(m+1)}(x_0+\theta' h)\quad ;0<\theta'<1$$

حيث θ' هي دالة بتغير قيمتها بين الواحد والصفر .

نظرية تايلور لمتغيرين:

لتكن $f: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

ولتكن النقطتين $D \ni \left(\underbrace{a+h}_{x},\underbrace{b+k}_{y}\right)$ و (a,b), و القطعة الواصلة بينهما محتواة في D والمشتقات الجزئية حتى المرتبة $m+1$ (بما فيها $m+1$) موجودة ومستمرة على D و أيضاً الدالة f مستمرة في النقاط المحيطية للمجموعة D و لتعرف الدالة:

$$\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$$
$$t\mapsto\varphi(t)=f(\underbrace{a+th}_{x(t)},\underbrace{b+tk}_{y(t)})$$

نوهت الدكتورة لأن استنتاج صيغة تايلور لتابع لمتحولين غير مطلوبة و الأهم هو حفظ دستور تايلور لتطبيقه في تمارين نشر الدوال

نشتق φ بالنسبة ل t ...

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}(a+th,b+tk)\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}(a+th,b+tk)\frac{\partial y}{dt}$$
$$=h\frac{\partial f}{\partial x}(a+th,b+tk)+k\frac{\partial f}{\partial y}(a+th,b+tk)$$

نشتق مرة أخر و بملاحظة أن المشتقات الجزئية موجودة ومستمرة و بالتالي تكون المشتقات المختلطة متساوية :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=h^2\frac{\partial f}{\partial x^2}+2kh\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)$$

لنفرض أن $p>2$

$$\frac{d^p\varphi}{\partial t^p}=h^p\frac{\partial^p f}{\partial x^p}+\frac{ph^{p-1}k}{1!}\frac{\partial^p f}{\partial x^{p-1}\partial y}+\frac{p(p-1)h^{p-2}k^2}{2!}\frac{\partial^p f}{\partial x^{p-2}\partial y^2}+\ldots+k^p\frac{\partial^p f}{\partial y^p}$$
$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(a+th,b+tk)\ldots\ldots(**)$$

بالعودة الى نشر تايلور بمتغير واحد بحيث نأخذ $x_0=0\,,h=1$ نعوض:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{f'(x_0)}{1!}h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\ldots\ldots+\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}h^m+R_{m+1}$$

حيث : $R_{m+1}=\frac{\varphi^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)}\,,0<\theta<1$

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)+R_{m+1}$$

وهكذا نكون قد وجدنا باستخدام العلاقة ** نظرية تايلور لمتغيرين و التي تنص على أنه إذا كان:

$$f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

ولتكن $(a,b)\epsilon D$ و $(a+h,b+k)$ والقطعة المستقيمة الواصلة بينهما من D والمشتقات الجزئية من المرتبة $m+1$ بما فيها موجودة ومستمرة على D فإن

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)+R_{m+1}$$

حيث : $R_{m+1}=\frac{\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1}}{(m+1)!}f(a+\theta h,b+\theta k)\ \ ,0<\theta<1$ باقي تايلور

ملاحظة : إذا كانت المشتقات الجزئية و f جميع المراتب موجودة وكانت $R_{m+1}\underset{m\to\infty}{\to}0$ ومنه

$$\boxed{f(a+h,b+k)-f(a,b)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)}$$

فإننا ندعوه بمنشور تايلور في جوار (a,b)

وقد نوهت الدكتورة أنها تريد القانون (١) مع ذكر $R_{m+1}\underset{m}{\to}0$

نظرية يونغ:

إذا كانت f دالة تحقق الشروط الواردة بنظرية تايلور لمتغيرين فإن باقي تايلور يعطى بالشكل التالي:

$$R_{m+1}=\frac{\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(m+1)}}{(m+1)!}f(a,b)+\mu(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

حيث $\mu(h,k)$ دالة حقيقة تحقق

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \mu = 0$$

مثال :

أثبت أن منشر في جوار (0) للدالة

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto f(x)=e^x\sin x$$

يعطى بالدستور :

$$e^x\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n$$

الحل:

$$f(0)=0$$

$$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$$

$$=\sqrt{2}e^x\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos(\frac{\pi}{4})}\sin x+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin(\frac{\pi}{4})}\cos x\right)$$

$$\Longrightarrow f'(x)=\sqrt{2}e^x\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)$$

$$\Longrightarrow f'(x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow f'(0)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$$

بأسلوب مماثل

$$f''(x)=\sqrt{2}e^x\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\Rightarrow f''(x)=\left(\sqrt{2}\right)^2e^x\sin(x+\frac{2\pi}{4})$$

$$f''(x)=\sqrt{2}e^x\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^2e^x\sin(x+\frac{2\pi}{4})$$

$$\Rightarrow f''(0) = \left(\sqrt{2}\right)^2 \sin\frac{2\pi}{4}$$

بنفس الطريقة:

$$f'''(x) = \left(\sqrt{2}\right)^3 e^x \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow f'''(0) = \left(\sqrt{2}\right)^3 \sin\frac{3\pi}{4}$$

$$e^x \sin x = 0 + \frac{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}}{1!}x + \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 \sin\frac{2\pi}{4}}{2!}x^2 + \ldots\ldots + \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n$$

هل المتسلسلة متقاربة ؟؟

نطبق (دالا امبير)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)x^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{\left(\sqrt{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{4}x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{2}\,x}{n+1}\,\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{\sin\frac{n\pi}{4}}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{\sin\frac{n\pi}{4}(n+1)} = 0\,, \forall x \in R$$

$\left(\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{\sin\frac{n\pi}{4}}\right.$ قيمة محدودة) و بالتالي

$$-\infty < x < \infty$$

فالمتسلسلة دوماً متقاربة ومجال التقارب هو $]-\infty, +\infty[$.

طريقة أخرى : نطبق دستور نصف قطر التقارب :

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\left(\sqrt{2}\right)^n}{n!}}{\dfrac{sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}(n+1)\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \infty$$

نصف قطر التقارب $\rho = \infty$ و بالتالي مجال التقارب هو $]-\infty, +\infty[$

إعداد: منى شغل – سندس العص – نذير تيناوي