طريقة بيكارد (طريقة التقريب المتتالي) لإيجاد حل تقريبي أو فعلي لمسألة القيم الابتدائية

الهدف من هذه الطريقة هو تحويل مسألة القيم الابتدائية إلى معادلة تكاملية. ومن ثم نوجد حل تقريبي للمعادلة التكاملية الناتجة ومن ثم يكون هذا الحل التقريبي هو حلاً تقريبياً لمسألة القيمة الابتدائية المدروسة.

لتكن لدينا مسألة القيمة الابتدائية:

$$(1)\quad \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

الشرط الابتدائي

عندئذ لايجاد حل تقريبي للمسألة (1) نكتب المعادلة التفاضلية $y' = f(x,y)$ بالشكل:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow dy = f(x,y)\,dx$$

بمكاملة طرفي المساواة الأخيرة على المجال $[x_0, x]$ نحصل على:

$$\int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(s,y)\,ds \Rightarrow [y]_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} f(s,y)\,ds \Rightarrow$$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(s,y)\,ds \Rightarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y)\,ds \quad (\star)$$

إن أي حل لمسألة القيمة الابتدائية (1) هو حل للمعادلة التكاملية (*) وبالعكس إن أي حل للمعادلة التكاملية (*) هو حل لمسألة القيمة الابتدائية (1)

نلاحظ: إن المعادلة التكاملية (*) ما هي إلا معادلة فولتيرا التكاملية.

إن حل المعادلة التفاضلية $y' = f(x,y)$ المتعلقة بمسألة القيمة الابتدائية (1) يحقق على الاقل الشرط الابتدائي:

$$y(x_0) = y_0$$

نعوض في الطرف الايمن من المعادلة (*) بـ $y(x_0) = y_0$ نيابةً عن y فنحصل على التقريب الاول:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\, ds$$

يسمى $y_1(x)$ بالتقريب الاول وهو تقريب افضل الحل $y(x)$ وذلك من اجل أي قيمة لـ x من $I = [a,b]$

لنفرض أن $y_1(x)$ لا يمثل حلاً للمعادلة التفاضلية بالتالي للحصول على تقريب أكثر دقة نقوم بتعويض y_1 نيابة عن y في الطرف الايمن (*) فنحصل على التقريب الثاني بالشكل:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1)\, ds$$

وبنفس الخطوات يكون التقريب الثالث بالشكل:

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_2)\, ds$$

والتقريب من المرتبة n هو:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1})\,ds$$

أي أننا بالمتابعة نحصل على متتالية من الحلول التقريبية $\{y_n(x)\}_{n\geq 1}$

مثال 1: استخدم طريقة التقريب المتتالي في حل مسألة القيم الابتدائية

$$y'(x) = 2y - 2x^2 - 3 \quad , \quad y(0) = 2$$

مكتفياً بالوصول إلى التقريب الثالث $y_3(x)$.

الحل: لدينا من الفرض $f(x,y) = 2y - 2x^2 - 3$ و $y_0 = 2$ و $x_0 = 0$

نعلم أن العلاقة التكرارية التي تعطينا الحلول التقريبية لمسألة القيمة الابتدائية هي:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))\,ds$$

$n = 1 \Rightarrow y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0(s))\,ds = 2 + \int_{0}^{x} f(s, 2)\,ds$

$$= 2 + \int_0^x [2(2) - 2s^2 - 3]\,ds = 2 + \int_0^x [1 - 2s^2]\,ds$$

$$= 2 + \left[s - \frac{2}{3}s^3\right]_0^x = 2 + x - \frac{2}{3}x^3$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1(x) = 2 + x - \frac{2}{3}x^3}$$

إن y_1 لا تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية المفروضة

وبالتالي نوجد y_2

$n=2 \Rightarrow y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))\,ds$

$= 2 + \int_0^x [2 + (2 + s - \frac{2}{3}s^3) - 2s^2 - 3]\,ds$

$= 2 + \int_0^x [1 + 2s - 2s^2 - \frac{4}{3}s^3]\,ds$

$= 2 + [s + s^2 - \frac{2}{3}s^3 - \frac{1}{3}s^4]_0^x = 2 + x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4$

$\Rightarrow \boxed{y_2(x) = 2 + x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4}$

إن y_2 لاتمثل حلاً للمعادلة التفاضلية المفروضة وبالتالي نوجد y_3.

$n=3 \Rightarrow y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_2(s))\,ds =$

$= 2 + \int_0^x [2(2 + s + s^2 - \frac{2}{3}s^3 - \frac{1}{3}s^4) - 2s^2 - 3]\,ds$

$= 2 + \int_0^x [1 + 2s - \frac{4}{3}s^3 - \frac{2}{3}s^4]\,ds = 2 + [s + s^2 - \frac{1}{3}s^4 - \frac{2}{15}s^5]_0^x$

$= 2 + x + x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{15}x^5$

$\Rightarrow \boxed{y_3(x) = 2 + x + x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{15}x^5}$

Zeina Brown

مثال: أوجد بطريقة التقريب المتتالي (طريقة بيكارد) حل مسألة القيمة الابتدائية.

$f(x,y) = y'(x) = x + y^2 \quad , y(0) = 0$

مكتفياً بالوصول إلى التقريب الثالث.

الحل: $y' = \frac{dy}{dx} = x + y^2 \quad , x_0 = 0 \ \& \ y_0 = 0$

نعلم أن العلاقة التكرارية التي تعطينا الحلول التقريبية بطريقة بيكار لمسألة القيمة الابتدائية هي:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))\, ds$$

$n = 1 \Rightarrow y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0(s))\, ds = \int_0^x f(s, 0)\, ds$

$= \int_0^x s\, ds = \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow y_1(x) = \frac{x^2}{2}$

$n = 2 \Rightarrow y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))\, ds$

$= \int_0^x \left(s + \left(\frac{s^2}{2}\right)^2\right) ds = \int_0^x \left(s + \frac{s^4}{4}\right) ds$

$= \left[\frac{s^2}{2} + \frac{s^5}{20}\right]_0^x \Rightarrow y_2(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20}$

$$y_3(x) = y_0(x) + \int_0^x f(s, y_2(s))\, ds$$

$$= \int_0^x \left[s + \left(\frac{s^2}{2} + \frac{s^5}{20} \right)^2 \right] ds$$

$$= \int_0^x \left[s + \left(\frac{s^4}{4} + 2\, \frac{s^2 \cdot s^5}{2 \cdot 20} + \frac{s^{10}}{400} \right) \right] ds$$

$$= \int_0^x \left[s + \left(\frac{s^4}{4} + 2 \cdot \frac{s^7}{40} + \frac{s^{10}}{400} \right) \right] ds$$

$$= \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^x + \left[\frac{s^5}{20} \right]_0^x + \left[\frac{s^8}{160} \right]_0^x + \left[\frac{s^{11}}{4400} \right]_0^x$$

$$\Rightarrow y_3(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} + \frac{x^{11}}{4400}$$

مثال 3 : أوجد بطريقة التقريب المتتالي حل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = 2 - \frac{y}{x} \quad , \; y(1) = 2$$

$$\underset{x_0}{y(\underset{\downarrow}{1})} = \underset{y_0}{\underset{\downarrow}{2}} \Longrightarrow x_0 = 1 \; , \; y_0 = 2$$

الحل:

$$y_n(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s))\, ds$$

$n = 1 \Rightarrow y_1(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^x f(s, y_0(x))\, ds$

$$y_1(x) = 2 + \int_1^x \left(2 - \frac{2}{s}\right) ds = 2 + \int_1^x 2\, ds - 2\int_1^x \frac{1}{s}\, ds$$

$$= 2 + [2s]_1^x - 2[\ln s]_1^x = 2 + [2x - 2] - 2[\ln x - \ln 1]$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1(x) = 2x - 2\ln x}$$

$n = 2$ $\Rightarrow$ $$y_2(x) = 2 + \int_1^x f(s, y_1(s))\, ds.$$

$$y_2(x) = 2 + \int_1^x \left(2 - \frac{y_1}{s}\right) ds = 2 + \int_1^x \left(2 - \frac{2s - 2\ln s}{s}\right) ds$$

ادامه

$$= 2 + \cancel{\int_1^x 2\, ds} - \cancel{2\int_1^x 1\, ds} + 2\int_1^x \frac{\ln s}{s}\, ds$$

$$= 2 + 2\int_1^x \ln s \cdot \frac{1}{s}\, ds = [2 + (\ln s)^2]_1^x = 2 + (\ln x)^2$$

$$\boxed{\int_1^x \underbrace{\ln s}_{H(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{s}}_{H'(s)}\, ds = \frac{H^{n+1}}{n+1}}$$

$n = 3$ $\Rightarrow$ $$2 + \int_1^x \left[2 - \frac{y_2}{s}\right] ds$$

$$= 2 + \int_1^x \left[2 - \frac{2 + (\ln s)^2}{s}\right] ds$$

$$= 2 + \left[2s - 2\ln s - \frac{(\ln s)^3}{3}\right]_1^x$$

$$y_3(x) = 2x - 2\ln x - \frac{(\ln x)^3}{3}$$

تعريف شرط ليبشتز : لتكن الدالة f بالمتغيرين (x, y) المعرفة على المنطقة $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (D من المستوي xoy) عندئذ يقال أن الدالة f تحقق شرط ليبشتز (بالنسبة لـ y) في المنطقة D إذا وجد ثابت $k > 0$ بحيث انه مهما كان أي نقطتين (x, y_1) ، (x, y_2) من D يتحقق الشرط الآتي :

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq k|y_2 - y_1|$$

بتعبير آخر : f تحقق شرط ليبشتز (بالنسبة لـ y) في (داخل) المنطقة D إذا تحقق الآتي :

$$\exists k > 0 : \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D \Rightarrow$$

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq k|y_2 - y_1|$$

نسمي الثابت k ثابت ليبشتز للدالة f بالمتغيرين (x, y)

مثال : لتكن $f(x) = xy^2$ حيث أن :

$$D = \{(x, y) ; |x| < 1 , |y| < 1\}$$

أثبت أنها تحقق شرط ليبشتز .

الحل : $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |xy_1^2 - xy_2^2| = |x| . |y_1^2 - y_2^2|$

$= |x| \cdot \underbrace{|y_1 + y_2|\, |y_1 - y_2|}$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ فرق مربعين حدين

ومنه فإن ما كون لدينا حسب خواص القيمة المطلقة:

$|a+b| \leq |a| + |b|$

فإنه يكون:

$\leq |x| \cdot |y_1| + |y_2| \cdot |y_1 - y_2|$

حسب الفرض من كون $|x| < 1$ & $|y| < 1$

$\leq 1 \cdot (1+1) \cdot |y_1 - y_2|$

$\leq \underset{k}{\underline{\underline{2}}} |y_1 - y_2|$

ومنه فإن $k = 2$ والهدف محقق:

$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in D$

ملاحظة: إذا كان $\frac{\partial f}{\partial y}$ محدود ضمن المنطقة D عندئذ

يحقق شرط ليبشتز.

البرهان:

$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, c)(y_1 - y_2)$

هذا هو شرط ليبشتز وهو محقق من نظرية القيمة الوسطى

بما أن $\frac{\partial f}{\partial y}$ محدود فإنه:

$$\exists M : \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq M \quad ; \forall (x,y) \in D$$

نعوض:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq M|y_1 - y_2|$$

ومنه فإنه إذا كان المشتق محدود فإن شرط ليبشتز محقق.

مبرهنة الوجود والوحدانية: لتكن $f(x,y)$ دالة مستمرة في الساحة D من المستوي xoy وليكن M ثابت موجب حيث.

$$|f(x,y)| \leq M \quad ; \forall (x,y) \in D$$

ونفرض أن f تحقق شرط ليبشتز بالنسبة لـ y داخل D أي

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$$

$$\forall (x,y_1), (x,y_2) \in D \quad , k>0$$

وحيث أن k ثابت ليبشتز ولا يعتمد على أي من x, y_1, y_2

وليكن $D_1 \subset D$ هو المستطيل الواقع في D والذي مركزه (x_0,y_0) والمعرف بالشكل:

$$D_1 = \{(x,y) \in D : |x - x_0| \leq a \,, |y - y_0| \leq b \,, a>0 \text{ and } b>0\}$$

وليكن: $M.h < b$

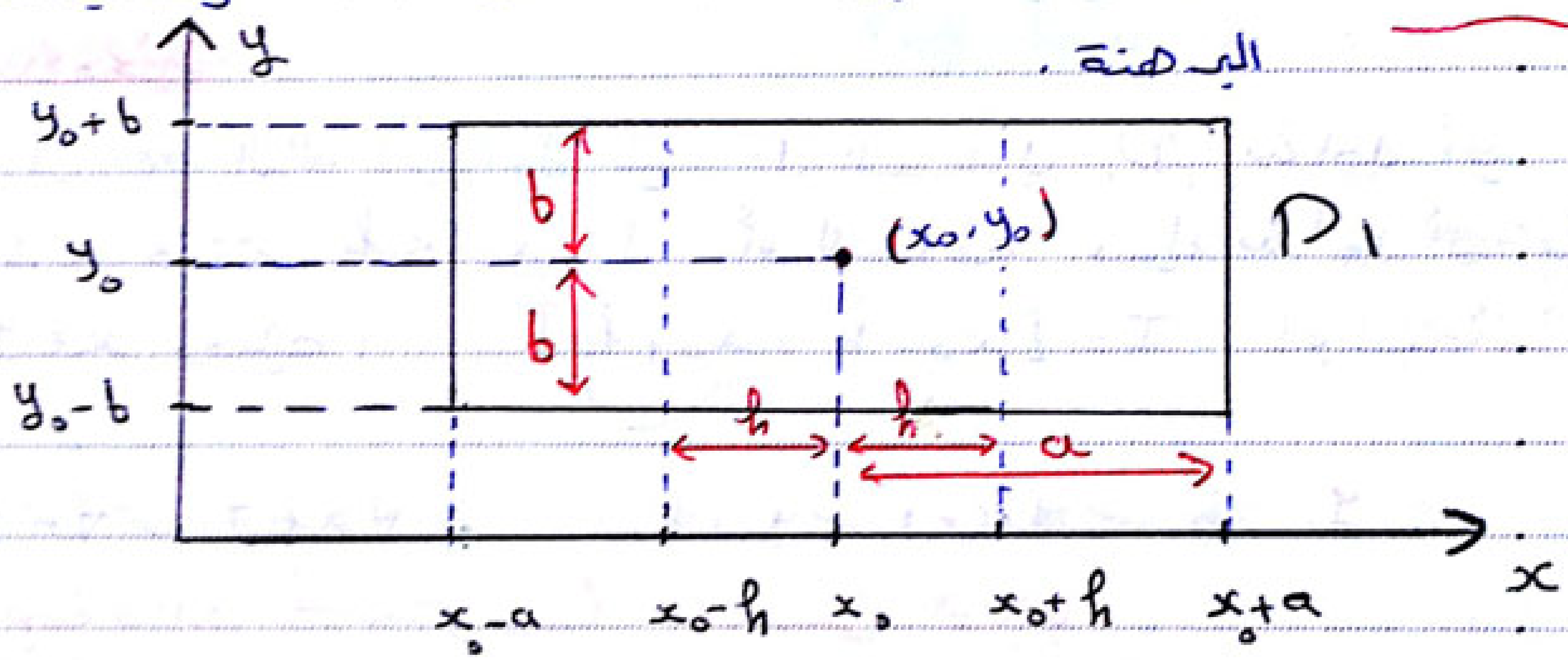
حيث: $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$

عندئذ يوجد حل وحيد $y = y(x)$ لمسألة القيمة الابتدائية.

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

وذلك من أجل كل x يحقق $|x - x_0| \le h$

البرهان: لنقوم أولاً برسم المستطيل D_1 المعرف في نص البرهنة.



سنستخدم في الاثبات طريقة بيكارد.

لنعرف من أجل كل x يحقق $|x_0 - x| \le h$ متتالية الدوال التابعية الآتية.

$$y_0, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$$

والتي حدودها معرفة كما يلي:

$$y_0(x) = y_0$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\, ds$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))\,ds$$

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_2(s))\,ds$$

$\vdots$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))\,ds$$

$\vdots$

سوف نقسم البرهان إلى خمس خطوات رئيسية.

الخطوة الأولى:

لنثبت أن منحني الدالة $y_n \,(n \geq 0)$ تقع داخل المستطيل D_1 من أجل أي قيمة لـ x تحقق $|x - x_0| \leq h$ أو للبساطة نقول من أجل أي قيمة لـ $x \in I$ وحيث: $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ أي لنثبت أن:

$$y_0 - b < y_n(x) < y_0 + b \quad ; \quad \forall x \in I \,,\ \forall n \geq 0$$

نثبت صحة ذلك باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي:

(خطوة البداية)

واضح أن: $y_0 - b < y_0(x) = y_0 < y_0 + b \quad ; \quad \forall x \in I$

بقي علينا صحة المطلوب من أجل $n = 1$:

في الحقيقة لدينا:

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\,ds \right| \leq \pm \int_{x_0}^{x} |f(s, y_0)|\,ds$$

$$\underset{\text{حسب الفرض } |f(x,y)| \leq M}{\Longrightarrow} \quad |y_1(x) - y_0(x)| \leq \pm \int_{x_0}^{x} M\,ds = \pm M \int_{x_0}^{x} ds$$

$$= \pm M(x-x_0) \le M\,\underbrace{|x-x_0|}_{|x-x_0|\le h} \le M.h < b$$

ليتضح لنا أن منحنى الدالة y_1 لا يتعدى حدود المستطيل D_1 وذلك ($\forall x\in I$

خطوة الاستقراء: نفرض أن المطلوب صحيح من أجل $(n-1)$ أي أن منحنى الدالة y_{n-1} لا يتعدى حدود المستطيل D_1 من أجل أي قيمة لـ $x\in I$. ولنبرهن صحة القضية من أجل n

$$|y_n(x)-y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(s,y_{n-1}(s))\right| \le \pm\int_{x_0}^{x} |f(s,y_{n-1}(s))|\,ds \quad -- **$$

فرضية الاستقراء تقول لنا بأن منحنى الدالة y_{n-1} لا يتعدى حدود المستطيل D_1 وهذا بدوره يعني أن:

$$(s,y_{n-1}(s))\in D_1\subset D \qquad \forall s\in I$$

وكون:

$$|f(x,y)|\le M \quad ; \forall (x,y)\in D$$

فنجد بالعودة إلى $**$ أن:

$$|y_n(x)-y_0| \le \pm\int_{x_0}^{x} M\,ds = \pm M(x-x_0) \le M|x-x_0|$$

$$\le \underbrace{M.h}_{|x-x_0|\le h} < \underbrace{b}_{\text{بالفرض}}$$

من الأخيرة نبين لنا أن منحنى الدالة y_n لا يتعدى حدود المستطيل D_1 وذلك من أجل أي قيمة لـ $n\in N$ استناداً إلى مبدأ الاستقراء الرياضي.

الخطوة الثانية: لنبرهن على صحة العلاقة الآتية:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le \frac{M \cdot k^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n \quad ; \quad \forall x \in I , n \geq 1$$

سوف نثبت صحة العلاقة السابقة بمبدأ الاستقراء الرياضي.

خطوة البداية: نبرهن صحة العلاقة من أجل $n = 1$

$$\underbrace{L_1}_{\text{الطرف الأيسر}} \overset{?}{\le} \underbrace{L_2}_{\text{الطرف الأيمن}}$$

$$L_1 = |y_1(x) - y_0|$$

$$L_2 = \frac{M \cdot k^0}{1!} \cdot |x - x_0|^1 = M|x - x_0|$$

والتراجحة:

$$|y_1(x) - y_0| \le M|x - x_0|$$

صحيحة بالفعل ، $\forall x \in I$.

وعليه فإن العلاقة صحيحة من أجل $n = 1$

خطوة الاستقراء: لنفرض ~~صحة~~ المتراجحة صحيحة من أجل $(n-1)$ أي أن

$$|y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| \le \frac{M \cdot k^{n-2}}{(n-1)!}|x - x_0|^{n-1} \quad ; \quad \forall x \in I$$

والفائدة تكمن بكتابة فرضية الاستقراء بدلالة n كما يلي:

$$|y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)| \le \frac{M.k^{n-2}}{(n-1)!}|s-x_0|^{n-1} \quad ; \forall s \in I$$

ولنبرهن على صحة التراجحة المفروضة من اجل n :

$$l_1 = |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \underset{\text{ب}}{=} \left|\int_{x_0}^{x}[f(s,y_{n-1}(s)) - f(s,y_{n-2}(s))]ds\right|$$

من تعريف $y_n(x)$
وتعريف $y_{n-1}(x)$

$$\le \pm\int_{x_0}^{x}|f(s,y_{n-1}(s)) - f(s,y_{n-2}(s))|ds$$

بما أن منحنيي الدالتين y_{n-2} ، y_{n-1} لا تخرج عن حدود المستطيل D_1
فإن $\forall s \in I$

$$(s, y_{n-1}(s)) \in D_1 \subset D$$

and

$$(s, y_{n-2}(s)) \in D_1 \subset D \qquad \forall s \in I$$

حسب الفرض إن الدالة f تحقق شرط ليبتشز بالنسبة لـ y داخل D
وبالتالي

$$\exists k>0 \; ; \; |f(s,y_{n-1}(s)) - f(s,y_{n-2}(s))| \le k\,|y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)|$$

$$\le k.\frac{M.k^{n-2}}{(n-1)!}|s-x_0|^{n-1} = \frac{M.k^{n-1}}{(n-1)!}|s-x_0|^{n-1}$$

بالعودة نجد أن :

$$l_1 \le \pm\int_{x_0}^{x}\frac{M.k^{n-1}}{(n-1)!}|s-x_0|^{n-1}ds = \pm\frac{M.k^{n-1}}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}|s-x_0|^{n-1}ds$$

$$\le \pm\frac{M.k^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{|x-x_0|^n}{n} \le \frac{M.k^{n-1}}{n!}|x-x_0|^n$$

$$\Rightarrow \ell_1 = |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le \frac{M \cdot k^{n-1}}{n!} \cdot |x - x_0|^n = \ell_2 \quad \forall x \in I$$

وهذا يعني أن المتراجحة صحيحة

من أجل كل $n \geq 1$

نتيجة هامة مما سبق تفيدنا في ما تبقى من إثبات !

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le \frac{M \cdot k^{n-1}}{n!} \cdot h^n \quad ; \forall x \in I \quad , n \geq 1$$

وذلك كون

$$|x - x_0| \le h \quad , \quad \forall x \in I$$

الخطوة الثالثة: لنثبت أن المتتالية التابعية $\{y_n(x)\}_{n \geq 0}$ متقاربة

بانتظام إلى الدالة $y = y(x)$ من أجل كل x

تحقق: $|x - x_0| \le h$ أو $x \in I$

من أجل ذلك نشكل المتسلسلة الغير منتهية الآتية:

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [y_n(x) - y_{n-1}(x)] = y_0 + [y_1(x) - y_0]$$

$$+ [y_2(x) - y_1(x)] + \cdots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + \cdots$$

والتي حدها العام،

$$u_n(x) = y_n(x) - y_{n-1}(x) \quad , \quad u_0 = y_0 = y(x_0)$$

من الواضح أن مجموع أول $(n+1)$ حد من المتسلسلة السابقة هو:

$$S_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{i=n} u_i(x) = y_n(x)$$

من جهة ومن جهة أخرى:

$$y_0 + \sum_{n=1}^{n=+\infty}[y_n(x)-y_{n-1}(x)] \le y_0 + \sum_{n=1}^{\infty}|y_n(x)-y_{n-1}(x)|$$

$$\le y_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M.k^{n-1}}{n!}h^n = y_0+\frac{M}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(k.h)^n}{n!}$$

إن السلسلة في الطرف الأيمن متقاربة من أجل جميع قيم $M,h,k>0$

إلى تابع أسي بالشكل:

$$y_0+\frac{M}{k}\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{(k.h)^n}{n!} = y_0+\frac{M}{k}(e^{kh}-1)$$

حسب

المنشور تايلور

التابع الأسي مطروحاً منه 1

وعليه حسب اختبار فايرشتراوس تكون السلسلة في الطرف الأيسر أي:

$$y_0+\sum_{n=1}^{n=+\infty}[y_n(x)-y_{n-1}(x)]$$

متقاربة بانتظام نحو تابع $y=y(x)$ في الفترة المغلقة

$$I=[x_0-h,\ x_0+h]$$

وبما أنها متقاربة إلى $y(x)$ فإن متتالية المجاميع الجزئية لها تكون متقاربة من الدالة $y(x)$ لكن متتالية المجاميع الجزئية لهذه السلسلة هي:

$$S_{n+1}(x)=\sum_{i=0}^{i=n}u_i(x)=y_n(x)$$

ويكون:

$$\lim_{n\to+\infty} S_{n+1}(x)=y(x) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n(x)=y(x)$$

بما

كون السلسلة متقاربة للتابع

$y=y(x)$ فمتتالية المجاميع الجزئية لهذه

السلسلة متقاربة إلى هذا التابع

وبالأخيرة تبين لنا أن متتالية الدوال $\{y_n(x)\}_{n\geq 0}$ متقاربة بانتظام إلى دالة $y=y(x)$ من أجل كل x

تحقق $|x-x_0|\leq h$ أي من اجل كل $x\in I$

كما أن هذه الدالة تحقق الشرط الابتدائي $y(x_0)=y_0$ لأن.

$$y_n(x_0)=y_0+\underbrace{\int_{x_0}^{x_0} f(s,y_{n-1}(s))\,ds}_{\text{صفر}} \Rightarrow y_n(x_0)=y_0 \;;\; \forall n\geq 0$$

2017 / 3 / 22 (المحاضرة الثالثة)

نكمل برهان المبرهنة:

الخطوة الرابعة: لنثبت أن الدالة $y=y(x)$ تحقق المعادلة التفاضلية. $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$

بما أن متتالية الدوال $\{y_n(x)\}_{n\geq 0}$ متقاربة بانتظام إلى الدالة $y=y(x)$

في الفترة المغلقة I فهذا يعني "حسب تعريف التقارب المنتظم"

أي:

$$\forall \varepsilon>0 \,,\, \exists N=N(\varepsilon) : \forall n>N(\varepsilon) \Rightarrow |y_n(x)-y(x)|<\varepsilon$$

لنبرهن أن:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{x_0}^{x} f(s,y_{n-1}(s))\,ds=\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))\,ds$$

في الحقيقة لدينا

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(s,y_{n-1}(s))ds - \int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds\right|$$

$$\leq \pm \int_{x_0}^{x} |f(s,y_{n-1}(s)) - f(s,y(s))|ds$$

بما أن منحنى y_{n-1} لا يتعدى حدود المستطيل D_1

مهما كان أي قيمة $x \in I$ وكذلك الامر بالنسبة للدالة y فهذا يعني أن

$$(s, y_{n-1}(s)) \in D_1 \subset D \;\&\; (s, y(s)) \in D_1 \subset D \quad ; \forall s \in I$$

وبما أن f تحقق شرط ليبشتز بالنسبة لـ y داخل D فإنه:

$$\exists k > 0 \div |f(s,y_{n-1}(s)) - f(s,y(s))| \leq k|y_{n-1}(s) - y(s)|$$

بالعودة نجد أن:

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(s,y_{n-1}(s))ds - \int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds\right| \leq \pm \int_{x_0}^{x} k|y_{n-1}(s)-y(s)|ds$$

$$\leq \pm k.\varepsilon \int_{x_0}^{x} ds$$

$$\leq k.\varepsilon.|x - x_0|$$

عندما $\varepsilon \to 0$ فإن $k.\varepsilon.|x-x_0| \to 0$ مما يعني أن.

$$\int_{x_0}^{x} f(s,y_{n-1}(s))ds \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds$$

(العلاقة المراد اثباتها)

لدينا تعريف الدالة $y_n(x)$ ما يلي:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))\,ds$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))\,ds$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to+\infty} f(s, y_{n-1}(s))\,ds$$

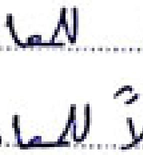
لكن :

$$\lim_{n\to+\infty} y_n(x) = y(x) \quad \& \quad \lim_{n\to+\infty} f(s, y_{n-1}(s)) = f(s, y(s))$$

ومنه يكون : $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds$

أي أن الدالة y التي حصلنا عليها هي حل للمعادلة التكاملية السابقة ومن ثم تكون $y = y(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية العادية من المرتبة الأولى $y' = f(x, y)$ والمحققة بالشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$ وذلك من أجل كل $x \in I$

النتيجة مما سبق هي : استطعنا إيجاد الدالة $y = y(x)$ التي منحنيها لا يتعدى حدود المستطيل D_1 أياً كانت $x \in I$ والتي تمثل حل المعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$ والتي تحقق الشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$ و هذا ما يثبت وجود الحل لمسألة القيم الابتدائية المفروضة.



الخطوة الخامسة و الأخيرة :

لنثبت أن الدالة $y = y(x)$ هي الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية والذي يحقق الشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$

ومن أجل ذلك نفرض $Y=Y(x)$ هو حل آخر للمعادلة التفاضلية وأن هذا الحل يحقق الشرط الابتدائي ومنحنيه لا يتعدى حدود المستطيل D_1 أياً كانت $x\in I$

$$y=y(x) \Rightarrow y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))\,ds$$

$$Y=Y(x) \text{ حل } \Rightarrow Y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,Y(s))\,ds$$

بطرح المعادلة الثانية من الأولى طرفاً لطرف نحصل على :

$$y(x)-Y(x)=\int_{x_0}^{x}[f(s,y(s))-f(s,Y(s))]\,ds$$

$$|y(x)-Y(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(s,y(s))-f(s,Y(s))]\,ds\right|$$

$$\Rightarrow |y(x)-Y(x)|\le \pm\int_{x_0}^{x}|f(s,y(s))-f(s,Y(s))|\,ds$$

بما أن منحني y لا يتعدى حدود المستطيل D_1 من أجل أي قيمة لـ $x\in I$ وكذلك الأمر بالنسبة للدالة Y فهذا يعني أن :

$$(s,y(s))\in D_1\subset D \quad \text{and} \quad (s,Y(s))\in D_1\subset D \quad \forall s\in I$$

وبما أن الدالة f تحقق شرط ليبشتز بالنسبة لـ y داخل D فإن

$$\exists\, k>0 : |f(s,y(s))-f(s,Y(s))|\le k|y(s)-Y(s)|$$

لنفرض أن $|y(s) - Y(s)| \leq B$

ومنه :

$$|y(x) - Y(x)| \leq \pm k.B \int_{x_0}^{x} ds \leq k.B\,|x - x_0|$$

$$\Rightarrow |y(s) - Y(s)| \leq k.B\,|s - x_0|$$

$$|y(x) - Y(x)| \leq \pm \int_{x_0}^{x} k.k.B\,|s - x_0|\,ds$$

$$\leq \pm k^2.B\,\frac{|x - x_0|^2}{2!} \leq k^2.B.\frac{|x - x_0|^2}{2!}$$

$$\Rightarrow |y(s) - Y(s)| \leq k^2.B\,\frac{|s - x_0|^2}{2!}$$

$$|y(x) - Y(x)| \leq \pm \int_{x_0}^{x} k.k^2 B.\frac{|s - x_0|^2}{2!}\,ds \leq \pm k^3.B\,\frac{|x - x_0|^3}{3.2!}$$

$$\leq k^3.B\,\frac{|x - x_0|^3}{3!}$$

وبعد التكرار n مرة نحصل على :

$$|y(x) - Y(x)| \leq k^n.B.\frac{|x - x_0|^n}{n!} \leq \frac{B(k.h)^n}{n!}$$

إن الطرف الأيمن من المتراجحة السابقة هو حد عام لمتسلسلة أسية متقاربة من أجل أي قيمة لـ B, k, h وبالتالي فإن الحد العام له يسعى للصفر عندما n تسعى اللانهاية أي أن

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{B(k.h)^n}{n!} = 0$$

وهذا يعني أنه يمكن جعل الطرف الايسر $|y(x) - Y(x)|$ أصغر من أي عدد وذلك مهما كان هذا العدد صغير وبالتالي فإن :

$$|y(x) - Y(x)| = 0 \Rightarrow y(x) = Y(x) \quad ; \quad \forall x \in I$$

وهذا ما يبين على وحدانية الحل لمسألة القيمة الابتدائية المفروضة

طريقة بيكارد (طريقة التقريب المتتالي) لايجاد حل معادلتين تفاضليتين :

نفرض أنه لدينا جملة المعادلتين التفاضليتين الآتيتين :

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = f(x, y, z) \\ &\qquad ; \; y = y(x) \quad , \quad z = z(x) \\ z' &= \frac{dz}{dx} = g(x, y, z) \end{aligned}\right\} (1)$$

والمزودة بالشروط الابتدائية :

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{and} \quad z(x_0) = z_0$$

المطلوب هو إيجاد حل مسألة القيمة الابتدائية السابقة بطريقة التقريب المتتالي .

في الحقيقة إن التقريب النوني (y_n, z_n) للحل المشترك لمسألة القيمة الابتدائية (جملة المعادلات (1) مع الشروط الابتدائية) هو :

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s), z_{n-1}(s))\, ds$$

$$z_n(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} g(s, y_{n-1}(s), z_{n-1}(s))\, ds$$

وحيث $n = 1, 2, \ldots$ فمن أجل $n = 1$ يكون

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0, z_0)\, ds$$

$$z_1(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} g(s, y_0, z_0)\, ds$$

ومن العلاقات التكرارية السابقة نلاحظ أن الزوج المرتب $(y_n(x), z_n(x))$ يتعين بدلالة الزوج $(y_{n-1}(x), z_{n-1}(x))$

وإن متتالية الحلول $\{y_n(x), z_n(x)\}_{n \geq 0}$ تتقارب من الحل الفعلي للجملة المفروضة تحت شروط معينة على الدالتين f و g وانه كلما تغيرت الشروط الابتدائية يتغير شكل الحل.

مثال: أوجد التقريب الثالث لحل جملة المعادلتين التفاضليتين التاليتين:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}\ z \\ &\frac{dz}{dx} = x^3 (y + z) \end{aligned}\right\}$$

الخاضعة للشروط الابتدائية:

$$y(0) = -1 \quad , \quad z(0) = \frac{1}{2}$$

الحل: لدينا من الفرض: $f(x,y,z) = z$ and $g(x,y,z) = x^3(y+z)$

$x_0 = 0 \ , \ y_0 = -1 \ , \ z_0 = \frac{1}{2}$

نعلم أن الصيغة التدريجية التي تعطينا الحل التقريبي لجملة المعادلات المزودة بالشروط المفروضة هي :

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s), z_{n-1}(s))\, ds$$

$$z_n(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} g(s, y_{n-1}(s), z_{n-1}(s))\, ds$$

$$\Rightarrow y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0(s), z_0(s))\, ds$$

$$= y_0 + \int_{x_0}^{x} z_0(s)\, ds \underset{\text{نعوض}}{=} -1 + \int_0^x \frac{1}{2}\, ds = -1 + \frac{1}{2}\int_0^x ds$$

$x_0 = 0$, $y_0 = -1$, $z_0(s) = z_0 = \frac{1}{2}$

$$= -1 + \frac{1}{2}[s]_0^x = -1 + \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow z_1(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} g(s, y_0(s), z_0(s))\, ds =$$

$$= z_0 + \int_{x_0}^{x} s^3 (y_0(s) + z_0(s))\, ds$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^x s^3\left(-1 + \frac{1}{2}\right) ds = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^x s^3\, ds$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{s^4}{4}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^4$$

وعليه يكون التقريب الاول هو :

$$y_1(x) = -1 + \frac{x}{2} \quad , \quad z_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^4$$

$$\Rightarrow y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_1(s), z_1(s))\, ds$$

$$= y_0 + \int_{x_0}^x z_1(s)\, ds = -1 + \int_0^x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}s^4\right) ds$$

$$= -1 + \left[\frac{s}{2} - \frac{1}{40}s^5\right]_0^x = -1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{40}x^5$$

$$\Rightarrow z_2(x) = z_0 + \int_{x_0}^x g(s, y_1(s), z_1(s))\, ds$$

$$= z_0 + \int_{x_0}^x s^3\left(y_1(s) + z_1(s)\right) ds$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^x s^3\left(-1 + \frac{s}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}s^4\right) ds$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^x \left[-\frac{1}{2}s^3 + \frac{s^4}{2} - \frac{1}{8}s^7\right] ds$$

$$= \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{8}s^4 + \frac{s^5}{10} - \frac{1}{64}s^8\right]_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^4 + \frac{x^5}{10} - \frac{1}{64}x^8$$

وعليه يكون التقريب الثاني هو:

$$y_2(x) = -1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{40}x^5 \quad , \quad z_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^4 + \frac{x^5}{10} - \frac{x^8}{64}$$

$$\Rightarrow y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_2(s), z_2(s))\, ds$$

$$= y_0 + \int_{x_0}^{x} z_2(s)\, ds = -1 + \int_{0}^{x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}s^4 + \frac{s^5}{10} - \frac{s^8}{64}\right) ds$$

$$= -1 + \left[\frac{s}{2} - \frac{1}{40}s^2 + \frac{1}{60}s^6 - \frac{1}{576}s^9\right]_0^x =$$

$$= -1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{60}x^6 - \frac{1}{576}x^6$$

$$\Rightarrow z_3(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} g(s, y_2(s), z_2(s))\, ds$$

$$= z_0 + \int_{x_0}^{x} s^3 (y_2(s) + z_2(s))\, ds$$

لكن $x_0 = 0$ و $z_0 = \frac{1}{2}$ وعليه:

$$y_2(s) + z_2(s) = -1 + \frac{s}{2} - \frac{s^5}{40} + \frac{1}{2} - \frac{s^4}{8} + \frac{s^5}{10} - \frac{s^8}{64}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s - \frac{1}{8}s^4 + \frac{3}{40}s^5 - \frac{1}{64}s^8$$

$$\Rightarrow s^3(y_2(s) + z_2(s)) = -\frac{1}{2}s^3 + \frac{1}{2}s^4 - \frac{1}{8}s^7 + \frac{3}{40}s^8 - \frac{1}{64}s^{11}$$

وعليه يكون :

$$z_3(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \left[-\frac{1}{2}s^3 + \frac{1}{2}s^4 - \frac{1}{8}s^7 + \frac{3}{40}s^8 - \frac{1}{64}s^{11} \right] ds$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{8}s^4 + \frac{s^5}{10} - \frac{1}{64}s^8 + \frac{1}{120}s^9 - \frac{1}{768}s^{12} \right]_0^x$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^4 + \frac{x^5}{10} - \frac{1}{64}x^8 + \frac{1}{120}x^9 - \frac{1}{768}x^{12}$$

وعليه التقريب الثالث يكون :

$$y_3(x) = -1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{60}x^6 - \frac{1}{576}x^9$$

$$z_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^4 + \frac{x^5}{10} - \frac{1}{64}x^8 + \frac{1}{120}x^9 - \frac{1}{768}x^{12}$$

مثال 2 : أوجد التقريب الثالث لإيجاد حل مسألة القيم الحدية التالية :

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = x^3\left(y + \frac{dy}{dx}\right)$$

$$y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = \frac{1}{2} \iff x_0 = 0 \ , y_0 = 1 \ , y'_0 = \frac{1}{2}$$

الحل : للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية تكافئ جملة معادلتين تفاضليتين من المرتبة الأولى .

نفرض : $y' = z \iff \frac{dy}{dx} = z$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = z' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = z = f(x,y,z) \quad , \quad \frac{dz}{dx} = x^3(y+z) = g(x,y,z)$$

$x_0 = 0 \quad , \quad y_0 = 1 \quad , \quad z_0 = \frac{1}{2}$

آلت إلى حل جملة معادلتين تفاضليتين وهما المعادلتين التفاضليتين للمثال السابق ويمكن التعميم بشكل مشابه

(متباينة جرونيل)

تفيد هذه المبرهنة في حل المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الاولى والدرجة الاولى وهذه المتباينة موجودة في المبرهنة الآتية.

مبرهنة: لتكن f, g دالتين بالمتغير x وغير سالبتين ومستمرتين لكل $x \geq x_0$ وليكن k ثابت موجب بحيث:

$$f(x) \leq k + \int_{x_0}^{x} g(s) \cdot f(s)\, ds \quad ; x \geq x_0$$

فعندئذ يكون:

$$f(x) \leq k\, e^{\int_{x_0}^{x} g(s)\, ds}$$

الاثبات: لنفرض أن g, f دالتين بالمتغير x ومستمرتين وغير سالبتين أياً كانت $x \geq x_0$ أي أن:

$$f(x) \geq 0 \quad \& \quad g(x) \geq 0 \quad \forall x \geq x_0$$

ولنفرض أن $k > 0$ ثابت موجب ولنفرض أيضاً

$$f(x) \leq k + \int_{x_0}^{x} g(s)\, f(s)\, ds \quad ; \quad x \geq x_0 \quad \ldots (1)$$

ومنه يكون لدينا :

$$g(s).f(s) \geq 0 \quad ; \forall s \geq x_0 \Rightarrow \int_{x_0}^{x} g(s).f(s)ds \geq 0 \quad \forall x \geq x_0$$

$$\left.\begin{array}{l} \int_{x_0}^{x} g(s).f(s)\,ds \geq 0 \quad ; \forall x \geq x_0 \\ \text{and} \\ k > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow k + \int_{x_0}^{x} g(s)f(s)ds > 0 \quad ; \forall x \geq x_0$$

استنادا لما سبق نستطيع تقسيم طرفي المتراجحة (1) على

$$k + \int_{x_0}^{x} g(s)f(s)ds$$

لنحصل على :

$$\frac{f(x)}{k + \int_{x_0}^{x} g(s).f(s)ds} \leq 1 \quad ; \forall x \geq x_0$$

نضرب طرفي المتراجحة الأخيرة بـ $g(x)$ نجد أن

$$\frac{f(x).g(x)}{k + \int_{x_0}^{x} g(s)f(s)ds} \leq g(x) \quad ; \forall x \geq x_0$$

نقوم بمكاملة طرفي المتراجحة الأخيرة بالنسبة لـ x وذلك من x_0 إلى x فنحصل على :

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f(s).g(s)}{k + \int_{x_0}^{s} g(t)f(t)dt} ds \leq \int_{x_0}^{x} g(s)ds$$

إذا لاحظنا أن الدالة المراد مكاملتها في الطرف الأيسر هي دالة كسرية البسط فيها هو مشتقة المقام لوجدنا أن

$$\left[\ln\left(k+\int_{x_0}^{s} g(t)f(t)\,dt\right)\right]_{x_0}^{x} \le \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \left[\ln\left(k+\int_{x_0}^{x} g(s)f(s)\,ds\right) - \ln\Big(k+\underbrace{\int_{x_0}^{x_0} g(t)f(t)\,dt}_{0}\Big)\right]$$

$$\le \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds$$

$$\ln\left(k+\int_{x_0}^{x} g(s)f(s)\,ds\right) - \ln(k) \le \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{k+\int_{x_0}^{x} g(s)f(s)\,ds}{k}\right) \le \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \frac{k+\int_{x_0}^{x} g(s)f(s)\,ds}{k} \le e^{\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds}$$

$$\rightarrow \underbrace{k+\int_{x_0}^{x} g(s)f(s)\,ds \le k\cdot e^{\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds}}_{(2)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1)\ \text{من} & f(x) \le k+\int_{x_0}^{x} g(s)f(s)\,ds \\ (2)\ \text{من} & k+\int_{x_0}^{x} g(s)f(s)\,ds \le k\cdot e^{\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \le k\, e^{\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds}$$

نتيجة: إذا كان $f(x) \le k \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds$ حيث $k, f(x)$ كما في المبرهنة السابقة

فإن: $f(x) \equiv 0$

البرهان: ليكن $\varepsilon > 0$ فإن: $f(x) < \varepsilon + k \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds$

باستخدام المبرهنة السابقة نجد أن:

$$f(x) < \varepsilon \exp[k(x-x_0)] \quad , \quad x \ge x_0$$

بأخذ النهاية عندما $\varepsilon \to 0$ نحصل على $f(x) \equiv 0$

ملاحظة: $e^{k(x-x_0)} = \exp[k(x-x_0)]$

ملاحظة هامة: يمكن استخدام متباينة جرونويل في اثبات وحدانية حل مسألة القيمة الابتدائية أي في اثبات الجزء الأخير من مبرهنة الوجود والوحدانية وهذا ما سنعمل به الآن

- لتكن لدينا مسألة القيم الابتدائية التالية:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

والتي تكافئ المعادلة التكاملية:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds \quad \ldots (2)$$

الكلام الآتي هو على اعتبار انه يوجد حل لمسألة القيم الابتدائية المفروضة.

لنفرض أن للمعادلة التفاضلية (1) أو للمعادلة التكاملية المكافئة (2) حلان y_1, y_2 يحققان الشرط الابتدائي أي أن:

حل $y_1 = y_1(x) \Rightarrow y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))\,ds$ ...(3)

حل $y_2 = y_2(x) \Rightarrow y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_2(s))\,ds$ ...(4)

بطرح 4 من (3) طرفاً لطرف نجد أن:

$$y_1(x) - y_2(x) = \int_{x_0}^{x} [f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))]\,ds$$

$$\Rightarrow |y_1(x) - y_2(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} [f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))]\,ds\right|$$

$$\Rightarrow |y_1(x) - y_2(x)| \leq \pm \int_{x_0}^{x} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))|\,ds$$

باستخدام شرط ليبشتز

$$\Rightarrow |y_1(x) - y_2(x)| \leq \pm k \int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_2(s)|\,ds$$

$$\Rightarrow |y_1(x) - y_2(x)| \leq 0 + \int_{x_0}^{x} \pm k\,|y_1(s) - y_2(s)|\,ds$$

بالاعتماد على متراجحة جرونول نجد أن:

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq 0\,e^{\pm k \int_{x_0}^{x} ds} \Rightarrow |y_1(x) - y_2(x)| \leq 0$$

$$\Rightarrow |y_1(x) - y_2(x)| = 0 \Rightarrow y_1(x) - y_2(x) = 0$$

$$\Rightarrow y_1(x) = y_2(x)$$

وبهذا نكون قد أثبتنا على وحدانية حل مسألة القيم الابتدائية.

- اعتماد متباينة جرونويل في حل مسألة القيمة الابتدائية على الشرط الابتدائي المفروض :

سوف نستخدم متباينة جرونويل في إثبات أنّ حل مسألة القيمة الابتدائية يعتمد تماماً على الشرط الابتدائي المفروض .

فإذا كان $y(x)$ ، $z(x)$ حلين لمسألة القيمة الابتدائية (1)

[أي المعادلة التكاملية (2)] ويحققان $y(x_0)=y_0$ ، $z(x_0)=z_0$

على الترتيب فإنّ :

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))\,ds$$

$$z(x)=z_0+\int_{x_0}^{x} f(s,z(s))\,ds$$

أي أنّ :

$$|y(x)-z(x)|\leq |y_0-z_0|+\int_{x_0}^{x}|f(s,y(s))-f(s,z(s))|\,|ds|$$

$$\leq |y_0-z_0|+k\int_{x_0}^{x}|y(s)-z(s)|\,.\,|ds|$$

وباستخدام متباينة جرونويل نحصل على :

$$|y(x)-z(x)|\leq |y_0-z_0|\exp(k.|x-x_0|)$$

ومن هنا نرى أنّ حل مسألة القيمة الابتدائية يعتمد على الشرط الابتدائي المفروض.

تمرين: أثبت أنّ مسألة القيم الابتدائية:

$$y'' + g(t,y) = 0 \quad , \quad \text{شروط ابتدائية} \begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(0) = z_0 \end{cases}$$

حيث g دالة مستمرة في منطقة ما D تحتوي $(0, y_0)$ تكافئ المعادلة التكاملية:

$$y(t) = y_0 + z_0 t - \int_0^t (t-s)\, g(s, y(s))\, ds$$

الحل: ليكن $\phi(t)$ حلاً لمسألة القيمة الابتدائية أي أن:

$$\phi'' + g(t, \phi(t)) = 0$$

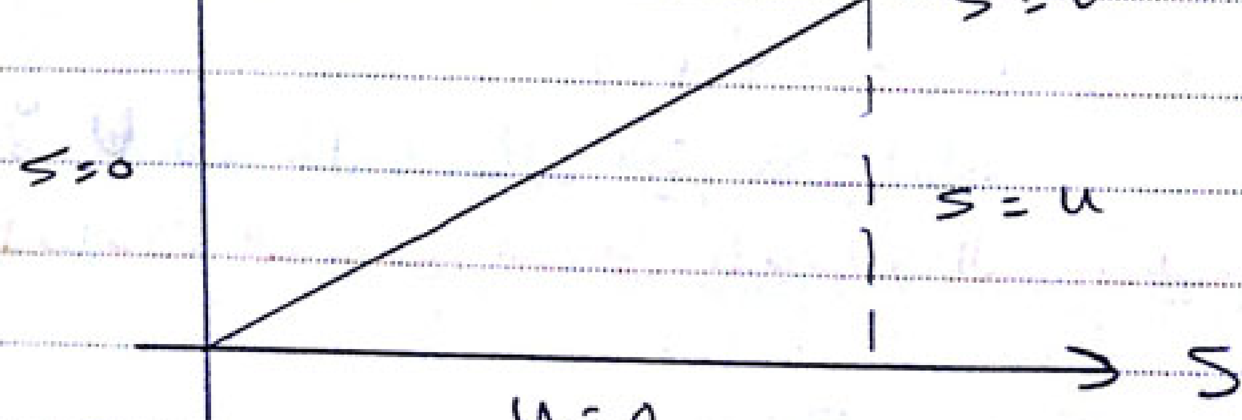
وبالتكامل مرتين نحصل على:

$$\phi(t) = -\int_0^t \int_0^u \{ g(s, \phi(s))\, ds \}\, du + a + bt \quad \dots (1)$$

وحيث أن:

$\phi(0) = y_0$ ، $\phi'(0) = z_0$ فإن $b = z_0$ ، $a = y_0$

والتكامل الثنائي ممتد على المنطقة في المستوى us كما هو مبين بالشكل:



وبمبادلة ترتيب التكامل نحصل على:

$$\int_0^t \left\{ \int_0^u g(s, \phi(s))\, ds \right\} . du$$

$$= \int_0^t \left\{ \int_s^t du \right\} . g(s, \phi(s))\, ds$$

$$= \int_0^t (t-s)\, g(s, \phi(s))\, ds \quad \text{---} \quad (2)$$

وبالتعويض من (2) في (1) نحصل على:

$$\phi(t) = -\int_0^t (t-s)\, g(s, \phi(s))\, ds + y_0 + z_0 t$$

وبصورة أخرى:

إذا فرضنا أنّ ψ هو حل للمعادلة التكاملية فإنّ:

$$\psi(0) = y_0 \quad \& \quad \psi'(0) = z_0$$

ومن ثم فإنّ $\psi(t)$ تحقق الشروط الابتدائية المذكورة وباستخدام المبرهنة الأساسية في التفاضل والاشتقاق مرتين نجد أنّ:

$$\psi'(t) = z_0 - \int_0^t g(s, \psi(s)).\, ds$$

$$\psi''(t) = -g(t, \psi(t))$$

ومن ثم فإنّ ψ هو حل لمسألة القيم الابتدائية

(ومنه فإنّ المعادلة التكاملية تكافئ المعادلة التفاضلية)

Zeina Brown