Mathematical Modeling

النمذجة الرياضية

المحاضرة: العاشرة

الدكتورة: ميسم

3/27/2017 المحاضرة العاشرة

البرمجة اللاخطية:

أجريت في السنوات الأخيرة بحوث تتناول حلولاً لما يسمى مسائل البرمجة اللاخطية. حيث أنه يوجد عائق رئيسي يعترض دراسة البرمجة اللاخطية وهو التشكيلة الواسعة من التقنيات المطبقة حالياً في معالجة المسائل الخاصة بالبرمجة اللاخطية حيث تم اقتراح العديد من الإجراءات الخوارزمية لحل مسائل البرمجة اللاخطية، ولكن مجموعة قليلة منها أثبتت فعلياً أنها مفيدة في التعامل مع مشاكل واقعية، إن بعضاً من أهم التقنيات تتناول تقريبات معينة وتستخدم مسائل برمجة خطية فرعية وفيما يلي سنتعرف على الأسس والمبادئ المهمة للبرمجة اللاخطية، وسنشرح عدة خوارزميات مهمة مستخدمة في حل مسائل البرمجة اللاخطية حيث أن الخوارزميات التي سنتعرض لها تم اختيارها للأسباب التالية:

1 _ استخدامها الشائع من الناحية العملية وحصولها على نسبة نجاح مرتفعة.

2 _ كل خوارزمية منتقاة توضح منهجاً أساسياً فيما يتعلق بحل مسائل البرمجة اللاخطية.

3 _ نرمجت جميعها من أجل حواسيب رقمية.

تعريف المسألة: تعرف المسألة ببرنامج رياضي معمم

$$f(x) \longrightarrow Min$$

$$H_j(x) = 0 \qquad ; j = \overline{1:n}$$

$$G_K(x) \begin{pmatrix} \geqslant \\ \leqslant \end{pmatrix} 0 \qquad ; K = \overline{1:m}$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$x \in E^n$ (حيث E^n هو أي فضاء كان ، قد يكون الفضاء الحقيقي أو الفضاء العقدي أو أي فضاء)

هنا نقدم التعاريف الآتية :

في المسألة السابقة لدينا n متحول قرار ، n قيد مساواة ، m قيد متراجحات ، نعلم أنه إذا كان تابع الهدف أو القيود خطية نحصل على مسألة برمجة خطية ، وهذا ما درسناه في المحاضرات السابقة ، أما إذا كان تابع الهدف أو القيود تحوي توابع لاخطية فإن المسألة تصبح مسألة برمجة لاخطية .

إن قيود عدم السلبية مشمولة ضمناً ضمن قيود المتراجحات .

ملاحظة: يمكن التعبير عن كل النماذج الرياضية بالشكل السابق

إن أي شعاع x يحقق مجموعة الـ n قيد مساواة و الـ m قيد متراجحات : يدعى حلاً مقبولاً أو حلاً نافذاً .

ندعو أي مجموعة خاصة من المتحولات التي تعطي قيمة أصغرية لـ $f(x)$ شعاع حل أمثل نرمز له بالرمز x^* وهو ليس وحيداً بالضرورة حيث أن العديد من مسائل البرمجة اللاخطية لها عدة أشعة حل تؤدي إلى نفس القيمة الأصغرية لـ $f(x)$.

و أن القرار بأن مسألة برمجة لاخطية تملك أو لا تملك حلاً أمثلاً يتعلق بكون أو عدم كون المسألة محدودة بالنسبة لمتحولات الحل الخاصة بها .

إن تعيين ما إذا كان هناك حل أمثل موجود لمسألة برمجة لاخطية محدودة هو أمر يتعلق بتابع الهدف و مجموعة القيود .

/ /

التوابع المتزايدة و المتناقصة:

لتكن لدينا مجموعة النقاط $x_1, x_2, \dots, x_n$ حيث $x_1<x_2<\dots<x_n$

إذا كان $f(x_1)<f(x_2)<\dots<f(x_n)$ عندها نقول إن التابع متزايد تماماً.

أما إذا كان $x_1<x_2<\dots<x_n$ و كان $f(x_1)>f(x_2)>\dots>f(x_n)$ عندها نقول إن التابع متناقص تماماً.

أما من أجل $x_1<x_2<\dots<x_n$ إذا كان $f(x_1)\leqslant f(x_2)\leqslant\dots\leqslant f(x_n)$ فإننا نقول إن التابع متزايد.

و من أجل $x_1<x_2<\dots<x_n$ إذا كان $f(x_1)\geqslant f(x_2)\geqslant\dots\geqslant f(x_n)$ عندها نقول إن التابع متناقص.

إن تزايد و تناقص التابع يحدد لنا فيما إذا كان التابع أحادي النمط أو متعدد الأنماط.

المقصود بالتابع أحادي النمط: إذا كان التابع $f(x)$ يتزايد (يتناقص) تماماً ضمن مجال معين إلى قيمة معينة ثم يتناقص (يتزايد) عندها نقول إن هذا التابع أحادي النمط و بالتالي يكون للتابع قمة واحدة (وادٍ واحد).

مثل:

المقصود بالتابع متعدد الأنماط: إذا كان للتابع أكثر من قمة و أكثر من وادٍ ضمن مجال معين فندعو هذا التابع تابعاً متعدد الأنماط.

النقطة الشاملة (المثلى): تكون مقابلة لكل أعلى أي ضمن مجال معين حول هذه النقطة مع ملاحظة أنها قد تكون أعلى من نقاط أخرى ضمن فضاء الحلول.

بأكمله ، على أنه من الممكن حصول العديد من هذه النقاط خلال صياغة برمجة لا خطية عامة. بأن هذه النقاط تدعى نقاطاً مستقرة أو نقاط صغرى محلية.

ملاحظة ١: يمكن أن تكون النقاط مستقرة عند نهاية صغرى محلية أو عند نقطة انعطاف أو عند نهاية عظمى، حيث يدعى أفضل حل أمثل النهاية الصغرى الشمولية

ملاحظة 2: تعطي معظم خوارزميات البرمجة اللاخطية حلولاً هي نهايات صغرى محلية، والسبب الأساسي لذلك هو الإجراءات الخوارزمية التي تعتمد على الخواص المحلية لمسألة برمجة لاخطية، وعندما لا تكون النهاية الصغرى فيجب اختبار حلول أصغرية محلية متساوية لتقييم الحل الأمثل مع ملاحظة أن العديد من المسائل الواقعية تملك فقط نهاية صغرى شمولية.

ملاحظة 3: إن فهم المسألة أو إجراءات البدء يساعد في إيجاد النهاية الصغرى الشمولية وفي حالات معينة يكون الحل محرز كل أمثل محلي في الواقع هو حل أمثل شمولي.

تصنيفات التوابع:

تصنف التوابع وفق ما يلي: (1) توابع مستقرة.

(2) توابع غير مستقرة (متقطعة).

(3) توابع متقطعة.

التوابع المحدبة و التوابع المقعرة.

تعريف التابع المحدب: يكون التابع $f(x)$ محدباً على مجال تعريفه إذا كان لأجل أي نقطتين x_1, x_2 في فضاء بعده n تتحقق المراجحة التالية:

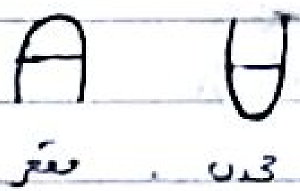
$$f[(1-\theta)x_1+\theta x_2] \leq (1-\theta) f(x_1)+\theta f(x_2)$$

حيث $0 \leq \theta \leq 1$

تعريف التابع المقعر: يعرف التابع المقعر بشكل مشابه ولكن بإشارة تراجح معكوسة.

المعنى الهندسي للتعريف السابق:

إذا كان تابع ما محدب (مقعر) ورسم خط بياني بين نقطتين على سطحه فإن الجزء من الخط الذي يصل بين هاتين النقطتين سيتوضعا أسفل (أعلى) ذلك التابع، وهنا نقدم الملاحظات التالية:



1) لا يشمل تعريف تابع محدب (مقعر) بكون التابع مستمر أو غير مستمر.
2) ممكن أن يكون تابعاً ما مقعراً في منطقة ومحدباً في منطقة أخرى.
3) التابع الخطي محدب ومقعر في آن معاً.

تأثير التقعر والتحدب في البحث عن الحل المثالي:

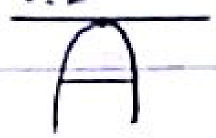
1/ حل أعظمي أو حل أصغري في حال التابع غير مقيد:

إذا كانت مسألة البرمجة اللاخطية تتألف من تابع هدف فقط وكان التابع محدباً (مقعراً) فإنه يوجد حل أمثل وحيد عند نقطة تقع داخل المنطقة المقبولة (منطقة الحلول) حيث تنعدم عندها جميع المشتقات أو عند نقطة حدية.

2/ إيجاد القيمة العظمى في حال التابع مقيد:

إذا كانت مسألة البرمجة اللاخطية تتألف من تابع هدف وقيود فإن كون الحل الأمثل وحيد يتوقف على طبيعة كل من التابع ومجموعة القيود، فإذا كان

تابع الهدف مقعراً و مجموعة القيود تشكل منطقة محدبة عندها يوجد حل أعظمي وحيد للمسألة و بالتالي فإن أي نقطة مستقرة يجب أن تكون حلاً أعظمياً شمولياً.



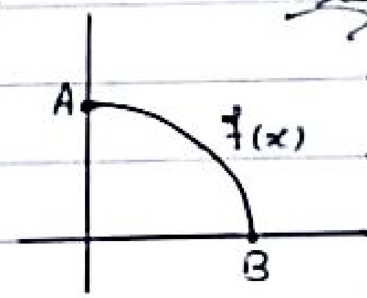
3 / إيجاد القيمة الصغرى في حال التابع مقيد:

إذا كانت مسألة البرمجة اللاخطية تتألف من تابع هدف و قيود و كان تابع الهدف محدباً و مجموعة القيود تشكل منطقة محدبة فإن أي نقطة مستقرة تكون حلاً أصغرياً شمولياً.

4 / إيجاد القيمة الأصغرية (الأعظمية) لتابع مقعر أو محدب:

إذا كنا نقوم بإيجاد القيمة الأصغرية (الأعظمية) لتابع مقعر أو محدب فإن الحل الأمثل سيوجد عند إحدى النقاط الحدية لمجموعة القيود.

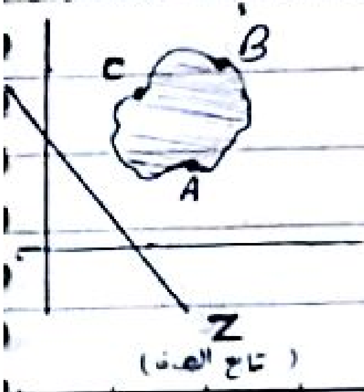
مثلاً: هذا تابع مقعر،



هنا نحتاج لاختبار النقطتين A ، B وتكمن المشكلة بأنه في معظم مسائل البرمجة اللاخطية لا سيما الصيغ الواقعية قد تكون مجموعة نقاط الحل كثيرة جداً.

5 / التابع الخطي محدب و مقعر في نفس الوقت:

يشكل التابع الخطي مثله مثل مسائل الأمثلة إجمالاً، وحسب تعريف التابع المحدب و التابع المقعر فإن التابع الخطي محدب ومقعر معاً لذا إذا كان هناك الحل محدداً علينا إيجاد الحل عند الحدود.



6 / إذا شكلت مجموعة القيود فضاء حلول غير محدب عندها علينا لأي إجراء خوارزمي يعتمد على الخواص المحلية لمسألة البرمجة اللاخطية أن ينتج نقطة.

مستقرة و قد لا تكون أعظمية شمولية.
ولا أصغرية شمولية . مثلاً: (الشكل الأخير المرسوم)
نفرض أن النقاط A, B, C هي حدود مثلث قلية فإنه لإيجاد القيم
العظمى لـ Z نجد أن B نقطة شمولية.

المصفوفات الصغرى الأساسية

إذا كانت المصفوفة المربعة Q ذات الأبعاد $n \times n$ فإن المصفوفة الصغرى
الأساسية من المرتبة K هي مصفوفة ذات أبعاد $K \times K$ نحصل عليها
بإهمال أي $(n-K)$ سطر و الأعمدة المقابلة لها في المصفوفة Q.

مثال: نأخذ المصفوفة Q

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

إن المصفوفات الصغرى الأساسية من
المرتبة 1 هي العناصر القطرية،
أما المصفوفات الصغرى الأساسية من المرتبة 2 هي

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

و المصفوفات الصغرى الأساسية من المرتبة 3 هي Q نفسها.

تعريف: ندعو محدد المصفوفة الصغرى الأساسية بالمحدد الأساسي حيث
أنه لكل مصفوفة مربعة من القياس $n \times n$ يوجد $(2^n - 1)$ محدداً
أساسياً.

Alnour

/ /

المصفوفة الجزئية الأساسية الرئيسية:

نحصل عليها من المرتبة K للمصفوفة nxn بإهمال (n-K) الأسطر الأخيرة و الأعمدة المقابلة لها.

في المثال السابق: تكون المصفوفة الجزئية الأساسية الرئيسية من المرتبة الأولى هي (1)

و المصفوفة الجزئية الأساسية الرئيسية من المرتبة الثانية هي $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

أما المصفوفة الجزئية الأساسية الرئيسية من المرتبة الثالثة فهي Q نفسها.

ملاحظة: عدد المصفوفات الجزئية الأساسية الرئيسية للمصفوفة nxn هو n مصفوفة

المصفوفة المعرفة الموجبة / المعرفة السالبة:

توجد بعض الاختبارات لتقييم المصفوفة فيما إذا كانت معرفة موجبة أو معرفة سالبة أو شبه معرفة موجبة أو شبه معرفة سالبة، و هذه الاختبارات تطبق على المصفوفات المتناظرة فقط، أما إذا كانت المصفوفة Q غير متناظرة فإننا نطبق الاختبار على المصفوفة

$$\frac{Q + Q^T}{2}$$

حيث Q^T هي منقول Q.

- اختبار المصفوفة المعرفة الموجبة: 1) متناظرة.

2) يجب أن تكون جميع العناصر القطرية موجبة تماماً.

/ /

③ يجب أن تكون كل المحددات الأساسية الرئيسية موجبة تماماً.

- اختبار المصفوفة شبه معرفة موجبة: ① إذا كانت متناظرة.
② جميع العناصر القطرية غير سالبة.
③ يجب أن تكون كل المحددات الأساسية الرئيسية غير سالبة.

ملاحظة: لإثبات أن المصفوفة Q معرفة سالبة (أو شبه معرفة سالبة) يكفي أن نثبت أن المصفوفة $(-Q)$ معرفة موجبة (أو شبه معرفة موجبة).

المصفوفة الهيسية (مصفوفة هيسيان):
ليكن لدينا التابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- نعرف تدرج التابع ونرمز له بالشكل ∇f حيث:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

- نعرف مصفوفة هيسيان للتابع f بأنها مصفوفة مربعة متناظرة من القياس $n \times n$ تعطى بالشكل:

$$H_{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]$$

$$; \quad i, j = \overline{1:n}$$

Alnour

مثال: إذا كان $f(x_1,x_2)$ فإن مصفوفة هيسيان له كالآتي.

$$H=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن هذه المصفوفة من القياس 2×2.

اختبار التوابع المحدبة والمقعرة.

يكون التابع f محدباً إذا كانت مصفوفة هيسيان له معرفة موجبة أو شبه معرفة موجبة من أجل كل x من $x_1,x_2,\dots,x_n$.

ويكون التابع f مقعراً إذا كانت مصفوفة هيسيان له معرفة سالبة أو شبه معرفة سالبة من أجل كل x من $x_1,x_2,\dots,x_n$.

مثال: هل التابع f الآتي محدب أم مقعر؟

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-6x_1-4x_2-2x_3$$

الحل: