تحليل المتجهات ومبادئ الهندسة التفاضلية ٤

١) برهن أن محيط الدائرة يساوي $2\pi r$

$\vec{F}: [0, 2\pi] \to R^2,\ T \mapsto (r\cos t, r\sin t)$

ادرس طول المنحني:

$$S = \int \sqrt{x'^2 + y'^2}\ .dt$$

$x = r\cos t \Rightarrow x' = -r\sin t \Rightarrow x'^2 = r^2\sin^2 t$
$y = r\sin t \Rightarrow y' = r\cos t \Rightarrow y'^2 = r^2\cos^2 t$ $\Big\} \Rightarrow$

$$S = \int \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\ .dt$$

$$S = \int \sqrt{r^2(\underbrace{\sin^2 T + \cos^2 T}_{=1})}\ .dt$$

$$S = \int_0^{2\pi} r\ .dt$$

$$S = rT\Big|_0^{2\pi} \Rightarrow S = 2\pi r$$

نفرض $S = rt \Rightarrow T = \frac{S}{r}$

$$\vec{F} = r\cos t\ \vec{i} + r\sin t\ \vec{j}$$

$$\vec{F} = r\cos\frac{S}{r}\ \vec{i} + r\sin\frac{S}{r}\ \vec{j}$$

ليكن $\vec{M}(T) = (T+1)\vec{i} + (T^3+3)\vec{j}$

$-\infty < T < +\infty$ بيّن أن المنحني أملس.

$\vec{M'}(t) = \vec{i} + 2t\vec{j}$

$\forall t \in]-\infty, +\infty[$

فإن

$\vec{M'}(t) \neq \vec{0}$

اذا C منحني املس ليس منغلق كون $t \in]-\infty, +\infty[$

:- وظيفة

1) ليكن C منحني معرف بالمعادلات الوسطية وفق θ

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \Leftarrow \begin{cases} x = \cos\theta(2\cos\theta - 1) \\ y = \sin\theta(2\cos\theta - 1) \end{cases}$$

برهن ان C منحني املس هل هو منغلق ولماذا.

2) اكتب بدلالة S طول المنحني المعطى بالشكل

$\vec{M}(t) = \alpha\cos t\,\vec{i} + \alpha\sin t\,\vec{j} + 6t\vec{k}$

اوجد طول المنحني

حالة خاصة: حساب S في حالة $M(r, \theta)$

:- وظيفة

لتكن $M(r, \theta)$ نقطة تتحرك على منحني حيث $y = r\sin\theta$, $x = r\cos\theta$

عندئذ

$$S = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{r^2 + r'^2}\,.dt$$

:- وظيفة

لتكن M تتحرك على منحني C وفق المعادلة

$r = ae^{2\theta}$

$\theta = 6t$

1) احسب طول المنحني $[0, 2\pi]$

Scanned by CamScanner

لشعاع وحدة الناظم الاساسي ونصف قطر التقوس

تعريف المستقيم الناظم $\vec{N}$ الاساسي للمنحني c عند النقطة من M

ان المستقيم الناظم يعرف بالعلاقة

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{da} = \frac{(d \circ \vec{M})'}{da}$$

حيث a هي الفاصلة للمنحني للنقطة M على c

$\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{da}$ هو متجه واحدي محمول على الناظم وهو عمودي على $\vec{T}$

ومركباته $\vec{N}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$

$$da^2 = (d\alpha)^2 + (d\beta)^2 + (d\gamma)^2$$

$$da = \sqrt{(d\alpha)^2 + (d\beta)^2 + d(\gamma)^2}$$

$\vec{T} = (\alpha, \beta, \gamma)$

$\vec{T} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$

$\frac{d\vec{T}}{da} = \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{da}, \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{da}, \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{da}$

$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$

$da^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2$

$da = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}$

تمرين

$x = \theta \cos t$

$y = \theta \sin t$

$z = 6T$

اوجد $\vec{\beta}, \vec{N}, \vec{T}$

$$\vec{T} = (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}$$

$$x = a\cos(t)$$

$$\Rightarrow dx = -a\sin(t)$$

$$y = a\sin(T)$$

$$\Rightarrow dy = a\cos(t)$$

$$z = bt \Rightarrow dz = b$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

$$ds = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}$$

$$ds = \sqrt{a^2(\sin t)^2 + (\cos t)^2 + b^2}$$

$$ds = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = \frac{-a\sin(t)}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \beta = \frac{a(\cos t)}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\vec{T} = \left(\frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{da} = \left(\frac{d\alpha}{da}, \frac{d\beta}{da}, \frac{d\gamma}{da} \right)$$

$$da = \sqrt{(\alpha')^2 + (\beta')^2 + (\gamma')^2}$$

$$\alpha' = \frac{-a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow (\alpha')^2 = \frac{a^2\cos^2 t}{a^2+b^2}$$

$$\beta' = \frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow (\beta')^2 = \frac{a^2\sin^2 t}{a^2+b^2}$$

$$\gamma' = 0$$

$$da = \sqrt{\frac{a^2\cos^2 T}{a^2+b^2} + \frac{a^2 \sin^2 T}{a^2+b^2} + 0}$$

$\sin^2 T + \cos^2 T = 1$

$$da = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\overrightarrow{N} = \frac{\overrightarrow{dT}}{da} = \frac{\left(\frac{a\cos^2 T}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right)}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

اعداد: حيان مصطفى

فريق سيرامات.