الموضوع: المحاضرة الأولى — التاريخ: ٦ / ٣ / ٢٠١٧

مقدمة المقرر

نصادف في حياتنا اليومية الكثير من الحالات التي تستوقفنا وتتطلب منّا دراسة مركزة لإعطاء القرار الأمثل لطبيعة هذه الحالة.

- القرار الأمثل نقصد به إما ربح أكبر أو كلفة أصغرية.

على سبيل المثال ← إذا أردنا بناء أوتستراد بين دمشق والساحل على أنه يجب أن تتحقق أمور عدة لا تحتاج لإعلام القرار الأمثل للشعب. تنفيذه بأقصر وقت وبأقل كلفة. فنقدم لهم إنشاء بناء أكبر جسور كثيرة أو جبل أو وادي أو نهر.. نختار الأمثل حتى تكون الكلفة أصغرية.

* النمذجة:

بعض التعاريف للنمذجة: هي تعبير عن وصف لمسار أشتقاق العلم وكيفية بناءه أو انتاجه.

تعريف ٢: مبدأ أو تقنية تمكن الباحث من بناء نموذج لظاهرة أو لسلوك عبر إعطاء المتغيرات أو العوامل المفسرة لكل واحدة من هذه المتغيرات.

تعريف ٣: بناء فكري لنموذج رياضي موجه نحو وصف الواقع.

تعريف ٤: اختصاص لقواعد وآليات وتتكيف مع المجال الذي يدرسه يقوم بصياغة الموضوع قيد الدراسة والعمل على تبسيطه.

كثيراً ما يواجه مدرس الرياضيات سؤال من طلابه عن الفائدة الحياتية للرياضيات، أو ما أهمية الرياضيات في حياتنا، فالرياضيات في نظر الطالب هي علم جاف، لذلك كمدرسين علينا تسليط الضوء على هذا العلم الراقي وتطبيقه في الحياة عن طريقة معرفة كل مفهوم في الرياضيات وعمله.

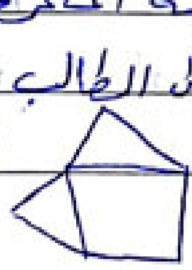
فلو سألنا ما فائدة القاسم المشترك الأعظم في حياتنا؟!!

لكي تجيب طالبك على هذا السؤال عليك بمثال من الواقع، فنقول «مثال»:
قالب من الكاتو مستطيل الشكل نريد تقسيمه بشكل متساوٍ، ماذا عليك أن تفعل، بحسب الطول للمستطيل والعرض له، القاسم المشترك الأعظم للطول والعرض يمكننا من تقسيمه بشكل متساوٍ.

• ما الفائدة من دراستنا للتكامل؟! سؤال كثيراً ما يسأل من الطالب والجواب كالتالي:

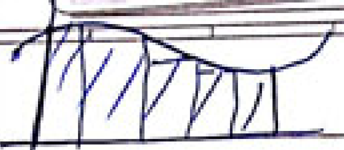
خلال سنواتنا الدراسية تعرفنا على قوانين عدة للمساحات منها:
مساحة المربع، ومساحة المستطيل ومساحة شبه المنحرف، ومساحة المثلث، جميعها قوانين ثابتة نطبقها فوراً، ولو طلبت من الطالب حساب مساحة الشكل:

لن يواجه مشكلة أبداً لأنه: أي الشكل



عبارة عن مثلث ومستطيل.

الموضوع   التاريخ / /



ولكن لو طلب منه حساب مساحة الشكل التالي
فلن نجد الحل إلا عن طريق التكامل لحساب مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى :

التكامل : أي منطقة محدودها خط منحني تساعدك على حساب المساحة المحصورة بين هذا الخط المنحني على أي مجال .

* حل المعادلات الخطية هو حل الحياة العملية والمسائل الاقتصادية لأنه كل مسألة حياتية تترجم إلى برنامج خطي أو غير خطي أو ديناميكي .

مثال : متجر يريد شراء أغراض وبالتالي يبحث عن المواد الأكثر استخداماً ومبيعاً أو الأغراض الأقل مبيعاً لأخذها الأكثر ربحاً وتوزيع النقود بحيث يكون التوزيع أمثل فنفرض على سبيل المثال x_1 تخزين منظفات ، x_2 تخزين معلبات ، و x_3 الألبان ...

* المصفوفات : فائدة المصفوفات تكمن في أنها أي شيء أو برنامج ننظمه في مصفوفة ..

بعض التعاريف للنموذج :

تعريف 1 : تمثيل لحالة حقيقية لشيء أبسط منها .

تعريف 2 : هو التمثيل الذهني لشيء ما وكيفية اشتغاله .

تعريف 3 : هو نظرية موجهة نحو العمل الذي نريد تحقيقه .

دور النمذجة في بناء العلم :

تسمح النمذجة في الرياضيات التطبيقية وعند تطبيقها في الكيمياء والفيزياء أو في أي مجال من مجالات الحياة بتحليل ظواهر واقعية و توقع النتائج من خلال تطبيق نظرية واحدة أو مجموعة من النظريات بشكل تقريبي .

تصنيف النماذج :

تصنف النماذج وفق ما يلي :

أ- النماذج غير الرياضية : مثل : نماذج لغوية ، نماذج رسومية ، نماذج مخططات

ب- النماذج الرياضية : وهي ولعدة أسباب تعد الأهم و الأكثر استخداماً من سائر أنواع النماذج الأخرى ، ويكون الهدف من النمذجة هو تحليل

سلوك نظام ما لمعرفة ميزاته من أجل إيجاد أفضل تصميم له ويتلخص ما سبق في المخطط التالي :

حالة حقيقية

↓

نموذج

↙ ↘

رياضي | غير رياضي

النمذجة الرياضية : للنمذجة الرياضية مجموعة من التعاريف نختار منها التعريف التالي :

النمذجة الرياضية هي صياغة مسألة ما وفق علاقات رياضية يطلق عليها أسم النموذج الرياضي .

النموذج الرياضي هو عبارة عن مجموعة من العلاقات الرياضية والمنطقية التي تمثل وضع الحالة قيد الدراسة حيث تصف هذه النماذج علاقات هامة بين المتحولات، ويتألف النموذج الرياضي من :

١. تابع الهدف الذي يجب زيادته الى الحد الأعلى أو انقاصه الى الحد الأدنى.
٢. قيود تحصر الحلول بالقيم الممكنة.

شروط النماذج الرياضية :

١. أن تكون قابلة للحل.
٢. أن تكون تمثيل صالح للوضع الأصلي.

* الخطوات التي يجب اتباعها لتكوين النماذج الرياضية لأي مسألة مطروحة :

١. دراسة المسألة المطروحة وتحديد غايتها ومكوناتها.
٢. تحديد المدخلات والمخرجات في ضوء الإمكانات المتاحة وتحديد الإمكانات

التاريخ / / الموضوع

المفروضة على المسألة.

٣. بيان علاقات التأثير بين مجاهيل المسألة.

بعد إيجاد النموذج الرياضي وتفسير نتائجه وفق طبيعة المسألة الحقيقية فإننا نكون أمام إحدى الحالتين:

الحالة الأولى: إذا كانت هذه النتائج مرضية

الحالة الثانية: إذا كانت هذه النتائج غير مرضية فإننا نحاول إجراء بعض التعديلات والتغيرات في الفرضيات التي اخترناها عند تقريب المسألة أو نبحث عن هيكل آخر للنموذج الرياضي.

أنواع النماذج الرياضية:

١. النموذج الخطي.

٢. النموذج اللاخطي.

٣. النموذج الديناميكي.

الديناميكي: هو النموذج الذي يمكن تجزئته إلى خطوات ثم نختار خيار معين حسب طبيعة الحالة موضوع الدراسة.

البرمجة الرياضية:

تعريف البرمجة: المقصود بالبرمجة يعني وضع خطوات لحل مسألة ما لبلوغ هدف معين.

تعريف البرمجة الرياضية: إن مسألة البرمجة الرياضية تعني بشكل عام البحث عن الحل الأمثل (صغرى أو عظمى) لتابع جبري تأخذ متغيراته متراجحات أو معادلات وحل مسألة البرمجة الرياضية يتطلب إيجاد قيم المتغيرات التي تحقق جميع القيود وتحقق الحل الأمثل لدالة الهدف وما البرنامج الرياضي ما هو إلا نموذج رياضي لمسألة ما.

أنواع البرمجة الرياضية: هناك أساس من أنواع البرمجة الرياضية البرمجة الخطية والبرمجة اللاخطية والبرمجة الديناميكية.

علينا نتعلم: البرمجة الخطية ← أنواع النماذج الخطية
← كيفية تحويل النموذج الخطي من الشكل العام للشكل النظامي.
← كيفية حل النموذج الخطي وتعديلاته.
← دراسة الحساسية للنموذج (كون عمليات)

الموضوع: البرنامج المرافق لبرنامج الخطي — التاريخ: / /

مقدمة في البرمجة الخطية

البرمجة الخطية: من أجل صياغة برنامج البرمجة الخطية يجب توافر:

١. تحديد الهدف بصورة كمية يعبر عنها تابع يكون المطلوب إيجاد القيمة العظمى أو الصغرى.

٢. تحديد القيود: يجب أن تكون الموارد المتاحة قابلة للقياس ويتم التعبير عنها بصيغة رياضية على شكل متراجحات أو مساويات و إذا كانت هذه المجاهيل تعبر عن كميات إنتاج فيجب أن تكون أكبر أو تساوي الصفر ويجب أن نفرض أنها لا تقل أو تزيد عن كمية معينة.

٣. تحديد البدائل المختلفة: يفترض أن يكون للمسألة أكثر من حل واحد، لأنه لو كان للمسألة حل واحد فلا يوجد ضرورة للبرمجة الخطية، بتعبير آخر تفيد البرمجة الخطية باختيار أفضل حل من بين الحلول المختلفة والمتعددة المقبولة.

أنواع النماذج الخطية:

أولاً: من حيث تابع الهدف نميز نوعان:

(١) إذا كان تابع الهدف تابع تقليل (min) يأخذ الشكل التالي

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to Min$$

(٢) إذا كان تابع الهدف تعظيم (max) يأخذ الشكل التالي:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to Max$$

ثانياً: من حيث القيود نوعان:

(أ) الشكل العام:

$$\sum_{j=1} a_{ij} x_j \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{pmatrix} b_i \quad ; \quad i=1:m$$

(ب) الشكل القياسي: تكون القيود بالشكل:

$$\sum_{j=1} a_{ij} x_j = b_i \quad ; \quad i=1:m$$

قيود على شكل مساويات.

FARAH

الموضوع المحاضرة الثانية   التاريخ ١٤ / ٣ / ٢٠١٧

النماذج الخطية تستخدم البرمجة الخطية في مجالات كثيرة نذكر منها

١. نموذج توزيع الإنتاج.

نفرض أن مصنعاً يمكنه إنتاج الأنواع A_j من المنتجات حيث $j = 1, n$ وذلك باستخدام المواد الأولية B_i حيث $i = 1, m$ التي تتوفر منها الكمية b_i حيث $i = 1, m$ إذا كانت الوحدة الواحدة من المنتجة A_j تستهلك من المادة الأولية B_i الكمية a_{ij} وإذا كان الربح الصافي للمصنع من إنتاج الوحدة الواحدة من المنتج A_j هو c_j المطلوب: تنظيم إنتاج هذا المصنع بحيث يكون الربح أعظمياً.

الحل:

ننظم جدول ينظم المعلومات

المواد الأولية \ المنتجات A_j	A_1	A_2	...	A_n	الكميات المتوفرة
B_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
B_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	b_2
⋮	⋮		⋮		⋮
B_m	a_{m1}	a_{m2}	---	a_{mn}	b_m
الربح	c_1	c_2		c_n	

دراسة الحالة: نفرض x_j الكمية المنتجة من المنتج A_j عندئذٍ يكون التابع

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

سمي كذا الشيء الذي نريد عمله تحليلات له

الموضوع .... التاريخ / /

قيد المادة B_1

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leqslant b_1$$

أو يساوي أي الأجزاء الباقية لا تصلح لإنتاج وحدة كاملة

قيد المادة B_2

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots \quad a_{2n}x_n \leqslant b_2$$

$\vdots$

لأنّ x_j منتجات

$$x_j \geqslant 0 \quad ; \; j = \overline{1,n}$$

النموذج الرياضي

النموذج الرياضي يتكون من تابع هدف وقيود

أوجد القيم العظمى للتابع $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

ضمن القيود أعلاه:

1- قيود المواد المتوفرة (المستخدمة في الإنتاج).

2- قيود عدم السلبية.

مثال: ينتج مصنع نوعين من العناصر $A1$ و $A2$ حيث يدخل في إنتاج هذه العناصر ثلاث مواد أولية $B1$ و $B2$ و $B3$ والكميات المتوفرة من هذه المواد محدودة حيث لدينا 30 وحدة من $B1$ و 20 وحدة من $B2$ و 25 وحدة من $B3$ ومن أجل إنتاج عنصر من النوع $A1$ يلزمنا أربع وحدات من $B1$ وأربع وحدات من $B2$، أما من أجل إنتاج عنصر من $A2$ يلزمنا 8 وحدات من $B1$ و 3 وحدات من $B2$ و 5 وحدات من $B3$ المطلوب وضع خطة إنتاجية مثلى لتحديد عدد العناصر المنتجة من $A1$ و $A2$ بحيث تحقق المصنع أكبر ربح ممكن علماً أن العنصر من $A1$ يؤدي إلى ربح قدره 30 وحدة نقدية والعنصر $A2$ يؤدي إلى ربح مقداره 1000 وحدة نقدية.

FARAH

المواد الأولية	A_1	A_2	b_i
B_1	4	8	30
B_2	4	3	20
B_3	0	5	25
	30	40	

نفرض x_1 و x_2 الكميات المنتجة من المنتجين A_1 ، A_2 على الترتيب
عندئذ يكون تابع الربح :

$$Z = 30x_1 + 40x_2$$

قيد المادة B_1

$$4x_1 + 8x_2 \leq 30$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 20$$
$$0x_1 + 5x_2 \leq 25$$

قيود عدم السلبية : $x_1, x_2 \geq 0$

الخطة الرياضية أو النموذج الرياضي :

أوجد القيمة العظمى للتابع $Z = 30x_1 + 40x_2$ ضمن القيود أعلاه .

مثال 2 : لكي يتم إنتاج ثلاث منتجات مختلفة من A_1 ، A_2 ، A_3
في شركة ما يجب أن تمر عبر ثلاثة أقسام إنتاجية مختلفة ،
فإذا علمت أن زمن إنتاج الوحدة الواحدة من المنتجات المختلفة
بالساعات في كل من الأقسام الثلاثة وكذلك الوقت الكلي المتاح
لكل قسم معطى حسب الجدول المرفق .
المطلوب إيجاد الخطة الإنتاجية المثلى لهذه الشركة من الوقت

الموضوع .... التاريخ / /

المتاح لكل قسم بحيث تحقق الشركة أكبر ربح ممكن علماً بأنّ الربح الحاصل من إنتاج كل وحدة من A_1, A_2, A_3 هو 10 ، 20 ، 12 وحدة نقدية على الترتيب.

القسم الإنتاجي	الزمن اللازم بالساعة لوحدة الإنتاج حسب القسم A_1	A_2	A_3	الوقت المتاح
القسم الأول	3	1	2	120
القسم الثاني	0	2	1	60
القسم الثالث	1	0	2	40
الربح العائد من الوحدة الواحدة	10	20	12	

نفرض أنّ x_1, x_2, x_3 هي الكميات المنتجة من المنتجات الثلاث على الترتيب، عندئذٍ يكون تابع الربح هو:

$$Z = 10x_1 + 20x_2 + 12x_3$$

قيد القسم الأول:

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120$$

قيد القسم الثاني:

$$0x_1 + 2x_2 + x_1 \leq 60$$

قيد القسم الثالث:

$$x_1 + 0x_2 + 2x_3 \leq 40$$

قيود عدم السلبية:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الموضوع التاريخ / /

النموذج الرياضي: أوجد القيمة العظمى للدالة Z ضمن القيود الأول والثاني والثالث وقيد عدم السلبية $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

2- نموذج الاستغلال الأمثل للأراضي الزراعية:

لنفرض أن لدينا n منطقة زراعية مساحة كل منها $a_1, a_2, \dots, a_n$ نريد زراعتها بـ m نوعاً من المحاصيل الزراعية لتأمين متطلبات المجتمع منها، حيث يلزمنا من المحصول i المقدار b_i إذا كان متوسط إنتاج واحدة المساحة في الحقل j من المحصول i يساوي a_{ij} طن في الهكتار، وكان الربح الحاصل من كل واحدة من المحصول i يساوي c_i.

المطلوب:

تحديد مقدار المساحة اللازم زراعتها بكل من المحاصيل وفي جميع المناطق لتحديد أكبر ربح ممكن لها مع تلبية احتياجات المجتمع من كل محصول.

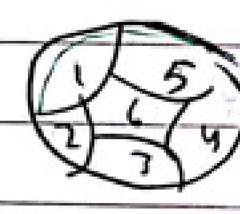
الحل:

نفرض x_{ij} المساحة المزروعة من المحصول i في المنطقة j عندئذٍ يكون تابع الربح

$$Z = c_1 x_{11} + c_2 x_{21}$$

المحصول

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}$$ ← الربح العائد من المحصول الأول في جميع المناطق.



x_{11} (1

x_{12} (2

x_{13} (3)

x_{1m} (m)

لننظم المعلومات السابقة في جدول:

المناطق / المحاصيل	1	2	...	n	الطلب	الربح
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1	c_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2	⋮
⋮	⋮				⋮	⋮
m	a_{m1}			a_{mn}	b_n	c_m
	a_1	a_2	...	a_n		

لنفرض x_{ij} الكمية المنتجة من المحصول i في وحدة المساحة من المنطقة j عندئذ فإن الكمية المنتجة من المحصول i في المنطقة j هي $a_{ij}x_{ij}$

الربح العائد من المنتج i هو عبارة عن:

$$c_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \quad ; \quad i=\overline{1,m}$$

$c_1 \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_{1j}$ الربح العائد من المنتج الأول

$c_2 \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_{2j}$ 〃 〃 〃 الثاني

⋮

ومنه:

$$Z = c_1\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_{1j} + c_2\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_{2j} + \dots$$

$$+ \dots c_n \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_{nj}$$

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \dots + a_{1n}x_{1n} \geq b_1$$

وهي الكمية المنتجة من المحصول الأول في جميع المناطق.

التاريخ / /

الموضوع

$$a_{m1}x_{m1} + \dots + a_{mn}x_{mn} \geq b_m$$

شروط التناظر:

$$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = a_1$$

$$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = a_n \quad ; \quad x_{ij} \geq 0$$

أخذنا في حل المسألة دليلين لأن لدينا مناطق ومحاصيل دليل للمناطق دليل للمحاصيل.

مسألة: نريد استغلال أربع مناطق زراعية هي الساحل، الغاب، وحلب، وحوران مساحة كل منها 10، 15، 100، 50 على الترتيب، وذلك بزراعتها بالمحاصيل التالية: قمح، شعير، قطن، تبغ، شوندر، والتي تحتاج منها الكمية ما يلي: 2000، 1500، 500، 100، 700 على الترتيب، لنفترض أن إنتاجية المناطق من تلك المحاصيل وأسعارها معطاة بالجدول التالي:

المحاصيل \ المناطق	الساحل	الغاب	حلب	حوران	الطلب	السعر
قمح	5	4	6	6	2000	1500
شعير	6	5	4	6	1500	1000
قطن	4	10	8	5	500	5000
تبغ	7	2	0	0	100	4500
شوندر	3	12	10	4	700	500
المساحة	10	15	100	50		

المطلوب صياغة النموذج الرياضي لهذه المسألة كي تكون قيمة الإنتاج أكبر ما يمكن:

marah

النحت

FARAH

الموضوع المحاضرة الثالثة التاريخ 2017/3/13

3. تركيب الخلائط نعالج هذا الموضوع على أساس تركيب أي خليطة معدنية ، غذائية ...

نص المسألة :

نفرض أننا نريد أن نركب خليطة من n مادة مناسبة وكل مادة تحتوي على m عنصر، حيث واحدة المادة j تحتوي A_{ij} واحدة من العنصر i وسعر الوحدة الواحدة من المادة j يساوي C_j ونريد ألا تقل كمية العنصر i في الخليطة عن مقدار معين B_i وأن تكون تكلفة الخليطة أصغر ما يمكن.

المطلوب : صياغة النموذج الرياضي الذي يحقق متطلبات المسألة السابقة

المواد في تركيب الخليطة / العناصر الداخلة في المواد	A_1	A_2	---	A_n	المقدار المطلوب
B_1	a_{11} الوحدة الواحدة من المادة A_1 ما تحتويه من B_1	a_{12}	---	a_{1n}	b_1
B_2	a_{21}	a_{22}	---	a_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
B_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	b_m
السعر التكلفة الكلية	C_1	C_2	---	C_n	

نفرض الكمية المأخوذة من المادة A_1 هي x_1

" " " A_2 هي x_2

" " " A_n هي x_n

$x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\Rightarrow a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

الكمية التي عضوها A_1 المادة

من شرط المسألة (ألا تقل)

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_j \geq 0 \;;\; j = \overline{1,n}$$

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

تابع الهدف

$\Leftarrow$ النموذج الرياضي: أوجد القيمة الصغرى للتابع

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to Min$$

وفق الشروط السابقة.

مثال: تركيب وجبة غذائية:

لنفرض أننا نريد تركيب وجبة غذائية من أربع أنواع من المواد A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 وأن سعر الواحدة من كل واحدة منها c_1 ، c_2 ، c_3 ، c_4 ونشترط أن تتضمن الوجبة مقداراً معيناً من العناصر الغذائية الهامة التالية:
البروتينات - الكربوهيدرات - الدهنيات، على ألا تقل كمية البروتين عن b_1 وكمية الكربوهيدرات عن b_2 وكمية الدهنيات عن b_3.

المطلوب:
إيجاد المقادير اللازمة من كل من المواد A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 التي يجب إدخالها في الوجبة بحيث تكون تكلفتها أقل ما يمكن إذا علمنا أن الواحدة A_1 تحتوي a_{11} بروتين و a_{21} كربوهيدرات و a_{31} وحدة دهنيات.
والواحدة A_2 تحتوي a_{12} وحدة بروتين، a_{22} وحدة كربوهيدرات، a_{32} وحدة دهنيات.

* مسألة خليط المنتجات :

ترغب شركة بتنظيم إنتاج لثلاث أنواع من المنتجات الطبيعية، حيث أن ذلك يتطلب توفر اليد العاملة و المواد، والقسم المسؤول عن التنظيم قدم المعلومات التالية

	النوع		
	A	B	C
يد عاملة ساعة/للوحدة	7	3	6
مواد كغ/للوحدة	4	2	3
الربح ليرة/للوحدة	4	2	3

فإذا كانت المواد الخام محددة بـ 200g يومياً وساعات العمل 150 ساعة عمل يومياً.

المطلوب : المقصود فيها عدد العمال لا عدد ساعات العمل

صياغة نموذج رياضي نحدد من خلاله ممثل الإنتاج اليومي من الأنواع الثلاثة بحيث يكون الربح أعظمياً.

الحل نفرض أن:

x_1 الكمية المنتجة من A

x_2 .. .. .. B

x_3 C

عندئذ يكون تابع الربح هو:

تابع الهدف $Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3$

شرط اليد العاملة:

$7x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 150$

أصغر أو يساوي لا نستطيع لأنه يزيد عن ساعتين ...

4

16

الموضوع   التاريخ   /   /

شرط المواد $4x_1+2x_2+3x_3 \le 200$

شرط عدم السلبية $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

النموذج الرياضي

أوجد القيمة العظمى للتابع $Z=4x_1+2x_2+3x_3$ وفق

شروط المواد اليد العاملة وشرط عدم السلبية:

$$7x_1+3x_2+6x_3 \le 150$$

$$4x_1+2x_2+3x_3 \le 200$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

4 اختيار وسيلة الإعلان

ترغب شركة إعلانات بتخطيط حملة إعلانية باختيار ثلاث وسائل مختلفة هي: التلفاز، الإذاعة، المجلات، تهدف هذه الحملة للوصول إلى أكبر عدد ممكن من الزبائن، وتُعطى نتائج دراسة السوق في الجدول التالي

	خلال النهار	الوقت الرئيسي	الإذاعة	المجلات
كلفة الوحدة الإعلانية	40000	75000	30 000	15 000
عدد الزبائن المحتملين للوحدة الإعلانية	400 000	900 000	500 000	200 000
عدد الزبائن المحتملين للوحدة الإعلانية من الإناث	300 000	400 000	200 000	100 000

لنفرض أن الشركة لا تريد إنفاق أكثر من 800000 على الإعلان، وإنها ترغب بما يلي: (1) أن لا يقل عدد الإناث عن 2 مليون.

(2) أن تحدد كلفة الإعلان في التلفاز بـ 500 ألف

(3) أن تشترى على الأقل ثلاث وحدات إعلانية خلال النهار، ووحدتان أثناء الوقت الرئيسي

(4) أن يتراوح عدد الوحدات الإعلانية بين 5 و 10 وحدات للمجلات.

الموضوع ____ التاريخ / /

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي الذي يحقق هدف الشركة.

الحل:

نفرض x_1 عدد الوحدات الإعلانية المشتراة في التلفاز خلال النهار

" x_2 " " " " " " خلال الوقت الرئيسي.

" x_3 " " " " " في الإذاعة

" x_4 " " " " " في المجلات.

تشكيل دالة الهدف:

دالة الهدف متعلقة بعدد الزبائن، ونلاحظ أن عدد الزبائن المحتملين للوحدة الإعلانية الواحدة في التلفاز خلال النهار هو $400\,000 \Rightarrow$ عدد الزبائن لـ x_1 هو $400\,000$ ...

ومنه تكون دالة الهدف "من الجدول" هي:

$$Z = 400\,000x_1 + 900\,000x_2 + 500\,000x_3 + 200\,000x_4$$

الشروط:

* شرط الإناث أن لا يقل عددهم عن 2 مليون ومنه:

$$300\,000x_1 + 400\,000x_2 + 200\,000x_3 + 100\,000x_4 \geq 2\,000\,000$$

* كلفة الإعلان في التلفاز يجب أن لا تقل عن 500000 ومنه الشرط:

$$40000x_1 + 75\,000x_2 \leq 500\,000$$

* أن تشتري على الأقل ثلاث وحدات إعلانية، ومنه الشرط:

$$x_1 \geq 3$$

* أن تشتري على الأقل وحدتين إعلانيتين، ومنه

$$x_2 \geq 2$$

* أن تتراوح عدد الوحدات الإعلانية بين 5 و 10 في الإذاعة.

$$5 \leq x_3 \leq 10$$

* أن تتراوح عدد الوحدات الإعلانية بين 5 و 10 في المجلات:

$$5 \leq x_4 \leq 10$$

الموضوع التاريخ / /

شرط الإنفاق هو أن لا تنفق الشركة أكثر من 800000 ومنه :

$$40000x_1 + 75000x_2 + 30000x_3 + 15000x_4 \leq 800000$$

شرط عدم السلبية : $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$\Leftarrow$ النموذج الرياضي هو : أوجد القيمة العظمى للتابع :

$$Z = 400000x_1 + 900000x_2 + 500000x_3 + 200000x_4$$

ضمن الشروط :

$$300000x_1 + 400000x_2 + 200000x_3 + 100000x_4 \geq 2000000$$

$$40000x_1 + 75000x_2 \leq 500000$$

$$x_1 \geq 3 \quad , \quad x_2 \geq 2$$

$$5 \leq x_3 \leq 10 \quad , \quad 5 \leq x_4 \leq 10$$

$$40000x_1 + 75000x_2 + 30000x_3 + 15000x_4 \leq 800000$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

5) مسألة التدريب المهني :

تقوم شركة تصنيع آليات ببرنامج تدريب مهني للميكانيكيين حيث يستخدم الميكانيكيون كمدرسين في برنامج التدريب بنسبة مدرّس واحد لكل عشر متدربين ويستمر برنامج التدريب لمدة شهر واحد وقد وجد من التجارب السابقة أنّه من كل عشر متدربين جدد ليتمكن سبعة من إنهاء البرنامج بنجاح ، فيخرج المتدرب غير الناجح من البرنامج ، يستفاد أيضاً من المتدربين الميكانيكيين في أعمال الخراطة وتقدر حاجة الشركة لهم في الأشهر الثلاثة (كانون الثاني شباط آذار) على النحو التالي :

كانون الثاني 100، شباط 150، آذار 200.

إضافة إلى ذلك تحتاج الشركة إلى 250 ميكانيكي مدرّب في شهر نيسان.

لنفرض أنّ عدد الميكانيكيين المدربين الموجودين في بداية العام هم 130، ولتكن تكاليف الأجور الشهرية كما يلي:

1. كلفة كل متدرب 400 وحدة نقدية.
2. كلفة كل ميكانيكي مدرّب يعمل صيانة أو تدريس 700 وحدة نقدية.
3. كلفة كل ميكانيكي مدرّب وليس له عمل 500 وحدة نقدية لأنّ عقد العمل يمنع تسريح الميكانيكي المدرب.

المطلوب:

صياغة نموذج رياضي للحصول على جدول لاستخدام الميكانيكيين وتدريبهم بكلفة أصغرية بحيث تتحقق متطلبات الشركة.

الحل:

نفرض: x_1 عدد المدرسين خلال شهر كانون الثاني.

x_2 " العاطلين عن العمل " " " "

x_3 عدد المدرسين خلال شهر شباط.

x_4 " العاطلين عن العمل " " "

x_5 عدد المدرسين خلال شهر آذار.

x_6 " العاطلين عن العمل " "

لدينا من نص المسألة: "وقد وجد من التجارب السابقة أنه من كل عشرة مدرسين جدد يتمكن سبعة فقط من إنهاء البرنامج بنجاح"

لذلك يكون: مدرس خلال 2ك x_1 → نجحوا → $10x_1$

مدرس خلال شباط x_3 → $10x_3$

مدرس خلال آذار x_5 → $10x_5$

الذين اجتازوا الدورة ويتقاضون 700 وحدة نقدية

متدربين خضعوا للدورة ويتقاضون أجر 400 وحدة نقدية

⇐ يبقى لدينا x_2 ، x_4 ، x_6 العاطلين عن العمل ويتقاضون 500 وحدة نقدية =

FARAH

ملاحظة:

لا نتعرض عن عدد الراسبين الذين فرجوا من الدورة التدريبية، وبالتالي يكون تابع الهدف "تابع الكلفة":

$$L = 400(10x_1 + 10x_3 + 10x_5) + 700(x_1 + x_3 + x_5) + 500(x_2 + x_4 + x_6)$$

الشروط:

- لدينا: عدد الميكانيكيين في بداية كل شهر = عدد العاملين في الحراثة + المدرسين + عدد العاطلين عن العمل.

الشركة كانت تمتلك في بداية شهر كانون الثاني 130 ميكانيكي مدرب، وحاجة الشركة للذين يعملون في أعمال الحراثة في شهر كانون الثاني هي 100 وبالتالي يكون:

حاجة الشركة من ك2 — المدرسين في بداية ك2

$$130 = 100 + x_1 + x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 30$$

الموجودين في بداية ك2 — العاملين في الحراثة — العاطلين في بداية ك2

- أما في بداية شهر شباط تحتاج لـ 150 ميكانيكي مدرب في أعمال الحراثة، وكان لدينا في شهر كانون الثاني

$130 + 7x_1$ (بداية العام)

سبع ناجحين من الذين اجتازوا الاختبار.

مدرسين في بداية شباط

وبالتالي يكون:

$$150 + x_3 + x_4 = 130 + 7x_1$$

حاجة الشركة للعمل في الحراثة في بداية شباط — عاطلين في بداية شباط — الموجودين في كانون الثاني

- أما في بداية شهر آذار تحتاج لـ 200 في أعمال الحراثة وتضيف لها مدرسين وعاطلين أي:

الموضوع التاريخ / /

عدد الميكانيكيين أول آذار

$200 + x_5 + x_6 \rightarrow$ عدد ملكين أول آذار

وكان لدينا من شهر شباط (الموجودين)؟

$130 + 7x_1 + 7x_3 \rightarrow$ عدد المدربين في شباط

عدد المدربين في ك2

وبالتالي يكون:

$$200 + x_5 + x_6 = 130 + 7x_1 + 7x_3$$

• أما في بداية شهر نيسان تحتاج الشركة إلى 250 ميكانيكيا مدرب:

كانت الشركة تملك في آذار

في بداية العام $\leftarrow 130 + 7x_1 + 7x_3 + 7x_5 \rightarrow$ ناتجين خلال آذار

الناتجين في ك2 ناتجين خلال شباط

وبالتالي يكون:

$$250 = 130 + 7x_1 + 7x_3 + 7x_5$$ مدربين في بداية نيسان

$\Leftarrow$ النموذج الرياضي هو: أوجد القيمة الصغرى للتابع:

$$L = 400(10x_1 + 10x_3 + 10x_5) + 700(x_1 + x_3 + x_5) + 500(x_2 + x_4 + x_6) \rightarrow Min$$

ضمن الشروط:

$x_1 + x_2 = 30$ استفادة ك2

$7x_1 - x_3 - x_4 = 20$ استفادة من شباط

$7x_1 + 7x_3 - x_5 - x_6 = 70$ استفادة من آذار

$7x_1 + 7x_3 + 7x_5 = 120$ استفادة من نيسان

$x_i \geq 0 \; ; \; i = \overline{1,6}$

حصلنا على هذه الشروط من اصطلاح الشروط أعلاه.

Marah

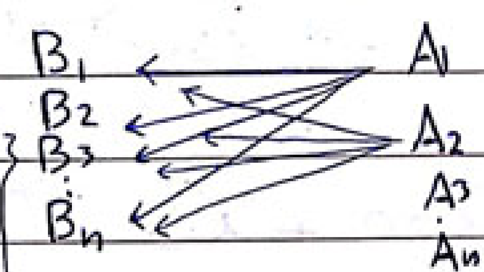
الموضوع المحاضرة الرابعة التاريخ 2017/3/19

30

مسألة النقل ← نقل مؤسسة تعليمية (باص)
نقل مواد مصنعة
⋮

المنقولة منه المنقول إليه

A_n مركز نقل B_m مركز استقبال.



أي لدينا تكلفة نقل من A_1 لجميع المراكز
- - - A_2 - - -
A_3
- - - ⋮ - - -
A_n

مثلا: الكميات المتوفرة $a_1, a_2, \ldots, a_n$ طاقة انتاجية، والمواد التي نحتاجها $b_1, b_2, \ldots, b_m$

* نص المسألة:

لنفرض أنه لدينا m مركز إنتاجي و n مركز استهلاكي.
نريد نقل المواد من مراكز الإنتاج الى مراكز الاستهلاك لذي
لنفرض أن الكمية المتوفرة في المراكز الإنتاجية $a_1, a_2, \ldots, a_m$
والكميات التي نحتاجها في المراكز الاستهلاكية هي $b_1, b_2, \ldots, b_n$
وتكلفة النقل من المركز الإنتاجي الى المركز الاستهلاكي هي c_{ij}
حيث $i = \overline{1,m}$ ، $j = \overline{1,n}$ والمطلوب:

صياغة نموذج رياضي بحيث تكون تكلفة النقل أقل ما يمكن.

الحل: لدراسة هذه المسألة: أولاً نقوم بحساب الآتي:
$\sum_{i=1}^{m} a_i$ ، $\sum_{j=1}^{n} b_j$ ونقارن بينهم.

1. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ نقول أن النموذج مغلق.

في هذه الحالة نفرض أن x_{ij} الكمية المنقولة من المركز الإنتاجي الى المركز الاستهلاكي.
ولكتابة تابع الهدف:

الموضوع التاريخ / /

أولاً: نحدد التكلفة النقل من كل مركز إنتاجي إلى جميع المراكز الاستهلاكية

مثلاً:

$$\sum \text{ نجمع } \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} = C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + \dots + C_{n}x_{1n} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} C_{mj}x_{mj} = C_{m1}x_{m1} + x_{m2}x_{m2} \end{cases}$$

تكلفة النقل من المركز الإنتاجي الأول إلى جميع المراكز الاستهلاكية.

$$L = \sum_{j=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\,x_{ij}$$

وهو تابع الهدف المراد تصغيره.

الشروط:

الكميات المنقولة من المركز الإنتاجي الأول لجميع المراكز الاستهلاكية

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} &= a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} &= a_2 \\ &\vdots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} &= a_m \end{aligned}\right\}$$

الشروط على المراكز الإنتاجية

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

الكميات الواصلة إلى المركز الاستهلاكي الأول من جميع المراكز الإنتاجية

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} &= b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} &= b_2 \\ &\vdots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} &= b_n \end{aligned}\right\}$$

الشروط على المراكز الاستهلاكية

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j$$

وهذه في حالة النموذج المغلق

ملاحظة: النموذج المفتوح يرد إلى مغلق حتى يتم حله.

FARAH

24

3

الموضوع .... التاريخ / /

٢- هنا نميز حالتين : $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n}$

أ) إذا $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ هذه الحالة هي حالة فائض في الإنتاج ⟸

نأخذ : $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = S = b_{n+1}$

نضيف مركز استهلاك وهمي (رتبته $n+1$) وحاجته هي S .

- تكلفة النقل من جميع المراكز الإنتاجية إلى هذا المركز الإستهلاكي يساوي الصفر.

عندها يصبح تابع الهدف :

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} C_{ij} x_{ij}$$

$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1\,n+1}$

$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2\,n+1}$

$\vdots$

ملاحظة: بالمعادلات نضيف مركز استهلاك وهمي مثلاً : $2x_1 + 3x$ ... صفر ... بالعمود نضيف أيضاً.

إذاً نحول النموذج السابق إلى مغلق بإضافة مركز استهلاك وهمي حاجته هي $S = b_{m+1}$ ، وهي الفرق بين الكميات الموجودة في المراكز الإنتاجية والكميات التي تحتاجها في المراكز الإستهلاكية

و $\boxed{C_{i\,n+1} = 0}$

⟸ النموذج الرياضي : أوجد القيمة الصغرى للتابع :

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط : المجموعة الأولى

المجموعة الثانية

شرط عدم السلبية .

FARAH

ج) إذا كان $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$:

إنّ هذه الحالة هي حالة عجز في الإنتاج، لحل هذه المسألة نحوّل النموذج إلى نموذج متوازن (مغلق) وذلك بإضافة مركز انتاجي وهمي، طاقته الإنتاجية:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i = a_{m+1}$$

وتكلفة النقل منه وإلى جميع المراكز الاستهلاكية تساوي الصفر أي $C_{m+1\,j} = 0$

عندها يصبح تابع الهدف

$$L = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m+1\,1} \\ \vdots \\ x_{m+1\,1} \quad x_{m+1\,2} + \dots + x_{m+1\,n} \end{array}\right\} \text{مجموعة (1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} \\ \vdots \\ x_{m+1\,1} + x_{m+1\,2} + \dots + x_{m+1\,n} \end{array}\right\} \text{مجموعة (2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{ij} \geq 0 \quad , \quad i = \overline{1:m+1} \\ \qquad\qquad\quad j = \overline{1:n} \end{array}\right\} (3)$$

مثال تتزوّد (4) معامل B_1, B_2, B_3, B_4 بالمواد الأولية من (5) مراكز إنتاجية A_1, A_2, A_3, A_4، فإذا كانت حاجة المعامل هي على الترتيب 70، 60، 35، 95، وكانت الطاقة الإنتاجية للمراكز هي على الترتيب: 100، 50، 80، 60، 55

وإنّ كانت تكلفة النقل من المركز الإنتاجي A_1 إلى جميع المراكز الاستهلاكية على الترتيب 10، 9، 8، 7

* تكلفة النقل من المركز الإنتاجي A_2 الى جميع المراكز الاستهلاكية
2، 3، 4، 5

* تكلفة النقل من المركز الإنتاجي A_3 " " " " " "
3، 5، 7، 9

* تكلفة النقل " " " A_4 " " " " " "
2، 4، 6، 8

* تكلفة النقل " " " A_5 " " " " " "
3، 9، 12، 15

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي المناسب، بحيث تكون:

1. تكلفة النقل في جميع المراكز الإنتاجية أقل ما يمكن.
2. إذا كانت حاجة المركز الاستهلاكي B_1 هي 155 مع ثبات المعطيات كما هي في نص المسألة.

اكتب النموذج الرياضي المناسب

الحل: جدول النقل يكون بالشكل

	B_1	---	B_n	a_i
A_1				
⋮				
A_m				
b_j				$\sum a_i$ / $\sum b_j$

ومنه

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	7	8	9	10	100
A_2	2	3	4	5	50
A_3	3	5	7	9	80
A_4	2	4	6	8	60
A_5	3	9	14	15	55
b_j	70	60	35	95	345 / 260

من الجدول نلاحظ أنّ $\sum_{i=1}^{i=5} a_i = 345$ و $\sum_{j=1}^{j=4} b_j = 260$

أي $\sum_{i=1}^{i=5} a_i > \sum_{j=1}^{j=4} b_j$

وبالتالي فإنّ النموذج يمثل نموذج مفتوح من نوع فائض في الإنتاج. لصياغة النموذج الرياضي نفرض نموذج استهلاكي وهمي، ويكون مقدار استهلاكه هو الفرق بين الإجماليين أي.

$$b_{n+1} = b_5 = \sum_{i=1}^{i=5} a_i - \sum_{j=1}^{j=4} b_j$$

$$= 345 - 260 = 85$$

وتكلفة النقل إلى جميع المراكز الاستهلاكية صفر.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	7	8	9	10	0	100
A_2	2	3	4	5	0	50
A_3	3	5	7	9	0	80
A_4	2	4	6	8	0	60
A_5	3	9	14	15	0	55
	70	60	35	95	85	345 / 345

نفرض x_{ij} الكمية المنقولة من المركز الإنتاجي إلى المراكز الاستهلاكية

$$L = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{5} C_{ij} x_{ij}$$

ومنه النموذج الرياضي: أوجد التكلفة الأصغرية للتابع:

$$L = 7x_{11} + 8x_{12} + 9x_{13} + 10x_{14} + 0x_{15} + 2x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 0x_{25} + 3x_{31} + 5x_{32} + 7x_{33} + 9x_{34} + 0x_{35} + 2x_{41} + 4x_{42} + 6x_{43} + 8x_{44} + 0x_{45} + 3x_{51} + 9x_{52} + 14x_{53} + 15x_{54} + 0x_{55} \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 100$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 50$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 80$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 60$$
$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 55$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 70$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 60$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 35$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{314} + x_{54} = 95$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 85$$

$$x_{ij} \geq 0 \; ; \quad i = \overline{1:5}$$
$$j = \overline{1:5}$$

Marah Masri