نظري

◄ دكتور المادة : ملك مارديني

◄ المحاضرة : السادسة عنوان المحاضرة : دوال بيسل التفاضلية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـتعريف دوال بيسل التفاضلية

٢ـكيفية حل المعادلات التفاضلية باستخدام دوال بيسل

لنبدأ أصدقائي ^_^

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية من الشكل :

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

حيث أن v عدد ثابت عندئذ تسمى حلول المعادلة بجوار النقطة $x = 0$ **بدوال بيسل التفاضلية**

حسب مادرسنا سابقاً للمعادلة التفاضلية السابقة فإن $x = 0$ نقطة شاذة نظامية وبالتالي يكون الحل العام لها من الشكل $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\lambda}$ وكونه حل للمعادلة فهو يحقق المعادلة ومنه

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)C_n x^{n+\lambda-1} \rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda-1)(n+\lambda)C_n x^{n+\lambda-2}$$

نعوض كلاً من y, y', y'' بالمعادلة فنجد.........

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

$$x^2y'' + xy' + x^2y - v^2y = 0$$

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda-1)(n+\lambda)C_nx^{n+\lambda-2}+x\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)C_nx^{n+\lambda-1}+x^2\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+\lambda}-v^2\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+\lambda}=0$$

لنصلح الشكل الأن :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda-1)(n+\lambda)C_nx^{n+\lambda}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)C_nx^{n+\lambda}+\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+\lambda+2}-v^2\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+\lambda}=0$$

$$\xRightarrow{\text{نقسم على } x^\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda-1)(n+\lambda)C_nx^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)C_nx^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+2}-v^2\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n}=0$$

لتوحيد القوى نبدل في المتسلسلة (٣) كل n ب $(n-2)$ ومنه نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda-1)(n+\lambda)C_nx^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)C_nx^{n}+\sum_{n=2}^{\infty}C_{n-2}x^{n}-v^2\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[((n+\lambda)(n+\lambda-1)+(n+\lambda)-v^2)C_n]x^n+\sum_{n=2}^{\infty}C_{n-2}x^n=0$$

كتبنا المتسلسلات السابقة على شكل مجموع لمتسلسلتين الأولى تبدأ من الصفر والثانية من 2

لتوحيد الحدود الدنيا نفك من المتسلسلة الأولى الحد $n=0\ \&\&\ n=1$

لنضع المتسلسلتان تبدآن من الحد $n = 2$

$$\left((0+\lambda)(0+\lambda-1)+(0+\lambda)-v^2\right)C_0+\left((\lambda+1)(1+\lambda-1)+(1+\lambda)-v^2\right)C_1x$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left((n+\lambda)^2-v^2\right)C_n+C_{n-2}\right]x^n=0$$

$$(\lambda^2-v^2)C_0+[(\lambda+1)^2-v^2]C_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left((n+\lambda)^2-v^2\right)C_n+C_{n-2}\right]x^n=0$$

بالمطابقة مع الطرف الثاني فإن

١) الثوابت معدومة

٢) أمثال الدرجة الأولى ل x معدومة

٣) أمثال الدرجة n ل x معدومة أيضاً

$$(\lambda^2-v^2)C_0=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$\left((\lambda+1)^2-v^2\right)C_1=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$\left((n+\lambda)^2-v^2\right)C_n+C_{n+2}=0\ \ldots\ldots\ldots(3)$$

من (١) كون $C_0 \neq 0$ شرطاً سابقاً ومنه $\lambda^2 = v^2 \to \lambda_1 = v > \lambda_2 = -v$

وذلك إذا افترضنا $v > 0$ وأيضاً من (٢) حتى نحصل على مطابقة يجب أن تكون $C_1 = 0 : \lambda \neq \frac{1}{2}$

ومن (٣) نجد أن $C_n = -\frac{C_{n-2}}{(n+\lambda)^2-v^2} \Rightarrow C_n = -\frac{C_{n-2}}{(n+\lambda+v)(n+\lambda-v)}\ \ldots\ldots.\ (\#)$

وهي العلاقة العامة التي ستعطينا علاقة تكرارية خاصة من أجل كل قيمة ل λ (أي $\lambda_1 \&\& \lambda_2$)

من أجل $v > 0$ وليس عدد صحيح نأخذ الجذر الأكبر $\lambda_1 = v$ نعوض في العلاقة التكرارية(#)

ومنه $C_n = -\frac{C_{n-2}}{n(n+2v)}$ ونلاحظ من أجل $n = 3$ أنه $C_3 = -\frac{C_1}{3(3+2v)}$

وأيضا من أجل $n = 5$ نجد $C_5 = -\frac{C_3}{5(5+2v)} = \frac{C_1}{15(5+2v)}$

نلاحظ أن جميع الثوابت ذات أدلة فردية وتتعلق بالثابت $C_1 = 0$ يكون لدينا $C_1 = C_3 = C_5 = \cdots 0$

$$\Rightarrow C_k = 0 : k = (2t+1) : t \in \mathcal{N}$$

الآن نبدل كل (n) ب $(2n)$ وذلك لاستنتاج قيم الثوابت ذات الأدلة الزوجية

$$C_{2n} = -\frac{C_{2n-2}}{2n(2n+2v)} \rightarrow C_{2n} = -\frac{C_{2n-2}}{4n(n-v)} \quad : n \geq 1$$

وبتعويض قيم n نستنتج مايلي :

$$\mathrm{C}_{2\mathrm{n}} = \frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{4^{\mathrm{n}}\mathrm{n}!\,(\mathrm{n}-\mathrm{v})(\mathrm{n}-\mathrm{v}-1)\ldots\ldots(2-\mathrm{v})(1-\mathrm{v})}\mathrm{C}_0$$

لنفرض أن C_0 هي المقدار الثابت أي $C_0 = \frac{1}{2^{-v}\Gamma(1-v)}$

ونعوض C_0 بعلاقة C_{2n} ومنه

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!\,(n-v)(n-v-1)\ldots\ldots(1-v)} \cdot \frac{1}{2^{-v}\Gamma(1-v)} \rightarrow$$

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}2^{-v}n!\,\Gamma(n-v+1)}$$

ولاننسى أن $\boldsymbol{\Gamma(n-v+1) = (n-v)(n-v-1)\ldots\ldots\ldots\ldots(1-v)\Gamma(1-0)}$

ومنه الحل الخاص الثاني

$$y_2 = J_{-v}(2) = x^{-v}\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = x^{-v}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}2^{-v}n!\,\Gamma(n-v+1)}x^{2n} \rightarrow$$

$$y_2 = \left(\frac{x}{2}\right)^{-v}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-v+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

وهي دالة بيسل من النوع الأول من المرتبة $-v$ ومنه الحل العام لمعادلة بيسل حيث

$$v > 0 \ \&\& \ v \notin Z$$

$$y = A\,J_v(x) + B\,J_{-v}(x)$$

في حالة $v = 0$ تصبح المعادلة $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$ ويكون الحل كالتالي :

من المرتبة صفر
$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

في حالة v عدد صحيح

$$y_1 = J_v \left(\frac{x}{2}\right)^v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+v-1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$y_2 = J_{-v}(x) + aJ_v(x)\ln|x|$$

وهي دالة بيسل من النوع الثاني

انتهت المحاضرة

صفحتنا على فيسبوك: IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/	مجموعة السنة الثانية : Improve Our Mathematics	مجموعة السنة الأولى: طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق ٢٠١٧

إعداد: محمد شهلا – فادي الشريطي – مهيار طعمه