

جاء في إحدى المجلات الأمريكية (وول ستريت جورنال Wall Street Journal) مقالة صغيرة عن حوار يدور بين مدرس مقرر الجبر في إحدى المدارس ووالدة أحد التلاميذ، حيث استدعى مدير المدرسة الأم ليخبرها بكسل ابنها في الجبر، فأجابته الأم: " لا أظن أن سبب كسل ابني هو تهاونه، و إصراره على عدم التعلم، بل أظن أنه لا يصدق ما هو محتوى في الجبر ". و هذا الجواب العفوي الذي يربط بين مدى اهتمام التلميذ بالجبر (أو غيره من فروع الرياضيات)، و تصديقه له، يشير إلى مشكلة من نوع خاص في فهم طبيعة الرياضيات، و العقبات التي تحول دون ذلك. و هي ليست ناتجة - من وجهة نظر الأم - من صعوبة الرياضيات نفسها، أو من تعقيدها، بل تكمن المشكلة الأساسية في موقف المتلقي نفسه من هذا المقرر، أو ذلك. و هذا الموقف أضحى على قدر كبير من الأهمية من وجهة نظر تربوية حديثة.

و هذه الدراسة محاولة لاستكشاف بعض العوامل الاجتماعية، والنفسية، التي لها علاقة بتاريخ الرياضيات، وبتطورها، ولو على نحو غير مباشر، بغية توضيح أثر ذلك على المتلقي، أو الدارس. و هي تأتي لتستفيد من التطور الكبير الذي طرأ على علم النفس، حيث أصبح عديد من علمانه يعتقدون أن للعوامل الاجتماعية، أو الاقتصادية، أثراً كبيراً في العادات المعرفية عند الناس. كما أضحى هناك شريحة واسعة منهم تربط بين المنطق و علم النفس؛ بل إن ثمة تياراً فلسفياً يؤكد بأن المنطق لا يمكن أن يوجد مستقلاً عن علم النفس. وهذا يستدعي بلورة العلاقة العميقة القائمة بين الرياضيات، و الحالة الاجتماعية، و النفسية للإنسان، و إبراز دورها في تطور الرياضيات. أو أكثر دقة سنسلط الضوء على الجذور الاجتماعية، و النفسية، للمفاهيم الرياضية للتأكيد على حقيقة أن كثيراً من الكائنات الرياضية هي انعكاس لأشياء في الطبيعة، أو لقضايا اجتماعية، أو نفسية مختلفة. و هذا خلاف ما يعتقد بعضهم من أن هذه الكائنات ليست أكثر من ابتكارات عقلية بحتة. وهذه الدراسة ليست أكثر من مجرد إشارة سريعة إلى أهمية تقصي هذا الأمر من قبل المعنيين. و هذا بالطبع لا ينفي دور العوامل الأخرى في ولادة تلك المفاهيم، و لا ينتقص من قيمتها، أو دورها. بيد أن هذه الدراسة ستعمل على تسليط الضوء على دور العوامل الاجتماعية، و النفسية، أخذة بالحسبان وجهة النظر التي أضحى يؤكدها عديد من مؤرخي العلم، و هي أنه لدراسة ظاهرة - شبيهة بالتي نحن بصدددها - لا بد من استحضار عديد من فروع المعرفة الإنسانية، و النظر إلى العلاقات المتداخلة بينها.

و علاقة الرياضيات بإنسانية الإنسان عضوية لا تنفصم عراها. فقد لوحظ أن للرياضيات تأثيرات إنسانية عميقة في النفس البشرية، منها، على سبيل الذكر لا الحصر، أثرها في النمو الأخلاقي عند الإنسان (1). كما أن ذهنية الإنسان، و نفسيته، تنعكس على الرياضيات، و بنيتها، و من ثم تطورها. حيث نجد أن للدوافع الإنسانية حضوراً كبيراً في الرياضيات، وهي تعمل على تشكيل كثير من معالمها الرئيسية، و صوغها. و هذا ما سنحاول إمطة اللثام عنه.

و صحيح أن الرياضيات، أساساً، علم يُعنى بالأعداد بمختلف أنواعها، و بالأشكال الهندسية، و المعادلات الرياضية المختلفة، و غير ذلك من الكائنات الرياضية، بيد أن هذه الأشياء ليست أكثر من تصورات ذهنية تمتد جذورها إلى أعماق النفس الإنسانية، و إلى المكونات الاجتماعية للمجتمعات البشرية. و مبعث ذلك أن اهتمام الإنسان بالرياضيات منذ القدم لم يأت من فراغ. كما أن دوافع تطويرها، و العمل على توحيد فروعها، في العصر الحديث لم يكن عبثاً لا هدف منه، و لا طائل. و تجلى هذا الفعل التوحيدي في تصور نيكولا بورباكي (2) عن معمارية الرياضيات التي طرحت فيها البنى الرياضية: الجبرية، و التبولوجية، و الترتيب. و نتيجة لذلك فإنه - من وجهة نظرهم - يجب استخدام كلمة "رياضة" بدلاً من "رياضيات"، أي أن تكون بصيغة المفرد، وليس الجمع. وهذه وجهة نظر رياضية، و فلسفية، عميقة تحظى باهتمام شريحة كبيرة من الرياضيين المعاصرين. و الأكثر من ذلك فإنها القوة المحركة وراء تطور الرياضيات الحديثة. و من أوضح الأمثلة، و أبسطها، على ذلك، أنه بحلول خمسينيات القرن التاسع عشر الميلادي تطورت الهندسة تطوراً كبيراً، ذلك أن هندسات أخرى قد اكتشفت. لذلك أصبح لا بد من إيجاد طرق توحد هذه الهندسات. ففي العام 1870 كان هناك عديد من الهندسات: الإقليدية euclidean، و التآلفية affine، و الإسقاطية projective، و التعاكسية inverse، و الكروية spherical، و اللاإقليدية non - euclidean. و كل من هذه الهندسات ظهرت، و تبلورت، في فترات زمنية مختلفة، و أحياناً متباعدة جداً. و من المعروف أن إحدى الطرق التي كثيراً ما تتطور بها الرياضيات، هي أن يعيد الرياضيون تعريف بعض المواضيع بحيث تصبح فروع مختلفة منها فرعاً من الموضوع نفسه. و هذا ما قام به الرياضي الألماني كريستيان فيليكس كلاين Christian Felix Klein (1849-1925) في خطابه الذي ألقاه عام 1870 عندما مُنح لقب بروفيسور في جامعة إيرلنغن Erlangen في ألمانيا، و الذي أصبح معروفاً بأدبيات الرياضيات باسم (برنامج إيرلنغن Erlangen programme) لتصنيف الهندسات، أو نظرية كلاين إلى الهندسة. فقد كانت فكرته هو أن نعد الهندسة فضاء مزوداً بزمرة تحويلات (أي بنية رياضية من نوع خاص) لذلك الفضاء، و خواص الأشكال التي لا تتغير وفق أي تحويل من هذه الزمرة هي خواص تلك الهندسة. و التحويل transformation هنا تابع (تطبيق، أو دالة) يحفظ البنية (3).

و لا بد من الإشارة إلى أهمية إيقاظ الوعي عند المهتمين في دراسة تاريخ الرياضيات، تجاه فكرة سائدة على نطاق واسع مفادها: أن موقف المتلقي من الرياضيات، أو من قوانين الفكر الثلاثة المعروفة (4)، هو ذاته في جميع أرجاء المعمورة، و عند كل الشعوب قاطبة، بغض النظر عن طبيعة ذهنية هذه الشعوب، أو لغاتها الأم. حيث كان يُعتقد على نطاق كبير أن أنماط الفكر الإنساني هي واحدة؛ بمعنى أن الجميع يفكرون، و يستنتجون، و يستقرنون، وفق طرائق منطقية واحدة، و أن "ذانتهم المنطقية" ذاتها. و هذا ما أثبت علم نفس الثقافة بطلانه (5). حيث أضحي من المعروف أن الممارسات الاجتماعية يمكن أن تؤثر في طرق التفكير عند الإنسان. لذلك يقول ريتشارد إي. نيسبت في كتابه "جغرافية الفكر": "و ليس لنا أن نتوقع ممن ينبنو وجودهم الاجتماعي على التناغم أن يطوروا تراثاً للمواجهة أو الجدل" (6). لأنه عندما تسود في أي مجتمع فكرة اندماج أفراد المجتمع ليكونوا نسيجاً واحداً متناغماً فإن "الحلول الوسط" بين الآراء المتصارعة، و المتناقضة، يكون لها دوماً الأولوية، بل و هي الملاذ الذي يلجأ إليه جميع أفراد ذلك المجتمع منعاً للتصادم و الاختلاف. و مثال ذلك المجتمع الصيني حيث: "أن 95% من الصينيين هم من جماعة عرقية واحدة معروفة باسم "الهان" .. و هكذا عاش الصينيون لا يشهدون إلا اختلافاً ضئيلاً في الرأي، و يرون الشقاق مظنة عقاب يحل من أعلى أو يأتي على أيدي رفاق الحياة ... و من هنا دافعهم لاكتشاف الطريق الوسطى" (7). و نتيجة لطبيعة المجتمع الصيني من حيث التركيب العرقي، و هامش الحرية المحدود الذي كان يتمتع به أفراد ذلك المجتمع قديماً، أفضى كل ذلك إلى عدم حاجتهم إلى قواعد و قوانين إدارة الجدل، بما في ذلك مبدأ عدم التناقض. و يضيف نيسبت: "و على الرغم مما حققه الصينيون من تقدم كبير و موضوعي في مجالي الجبر و الحساب إلا أنهم حققوا إنجازاً ضعيفاً في الهندسة بسبب أن البراهين تعتمد على المنطق الصوري، خاصة فكرة عدم التناقض" (8). و إذا توقفنا قليلاً عند الحضارة الإغريقية، التي تميزت بالحرية الشخصية، و موقعهم الجغرافي على طرق التجارة في العالم القديم، و اختلاطهم الكبير مع الغرباء، فرض عليهم التعامل مع المتناقضات. فقد "اعتادوا دائماً مواجهة مواقف حيث يرون شخصاً يؤكد

أن " أ " هي الحجة بينما ينزع آخر إلى القول إنه " ليس أ " هي الحجة. و هكذا عايشوا تناقضاً وافداً بين آراء الغرباء، و تناقضاً محلياً يعبر عنه المواطنون من خلال آرائهم داخل الجمعية العامة وفي الساحات العامة. و طبيعي أن يؤدي هذا بالضرورة إلى تطور إجراءات معرفية من بينها المنطق الصوري للتعامل مع مظاهر و أسباب التناقض " (9). و هذا ما دفع أرسطو إلى صياغة قوانين الفكر الثلاثة، أو ما تسمى أحياناً القوانين الأساسية للمنطق، بما في ذلك القياس. و أحد هذه القوانين قانون عدم التناقض

The Law of Non - Contradiction الذي ينص على أنه : " لا يمكن أن تكون القضية ق و نفي ق في آن واحد ". أي أنه إذا أثبتنا قضية ما لا يمكننا أن ننفيها في الوقت نفسه. و يطلق بعضهم على هذا القانون " مبدأ لا يبتنز في عدم التناقض " .

"النزعة الاقتصادية" في تطور الرياضيات

مما لا شك فيه أن " عملية اكتشاف " - إن جاز التعبير - المستقيم، أو القطعة المستقيمة، كانت علامة فارقة، و ربما نقطة تحول، في تاريخ الفكر الإنساني عموماً، و في تاريخ الفكر الرياضي خصوصاً، بغض النظر عن كيف، و متى، و أين، كان ذلك. و قد لا نبالغ إذا قلنا إن اكتشاف المستقيم، أو القطعة المستقيمة، لا يقل أهمية عن اكتشاف الإنسان البدائي النار. لأن الإنسان حينها ذاق طعم الاقتصاد، ربما للمرة الأولى، ليس في الوصول إلى مكان ما انطلاقاً من مكان معين، بل بتجريد ذلك، و استخدامه في نواح عديدة من الحياة. و هذا الفتح العلمي قاد الإنسان إلى مزيد من الفتوحات الرياضية الأخرى المستمرة إلى يومنا هذا. و ما يهمنا في هذا السياق أن الدوافع النفسية الأيقينية، كما تبدو، هي التي حرّضت الإنسان القاري نحو مقاربة هذا الاكتشاف؛ وهو حب الاقتصاد عموماً، و الاقتصاد في الحركة خصوصاً، و ليس القيمة العلمية لهذا المفهوم. لأن ما بني على المستقيم، أو القطعة المستقيمة، من هندسات، و غير ذلك من علوم رياضية، لم يكن معروفاً عندها، أو قابلاً للتوقع، أو حتى من الممكن تخيله في تلك الفترة. ففي اكتشاف المستقيم (و قد يقول بعضهم اختراعه) (10) تعلم الإنسان الاقتصاد، و الوصول إلى ما ينبغي بأقصر الطرق، إلى أن أضحي هذا هدف العلم بعينه، حيث العلم كما يعرفه بعضهم : " اقتصاد في التفكير " . و الحديث عن دور " النزعة الاقتصادية " في تطور الرياضيات، وتاريخها، هو حقيقة الحديث عن نشأة الرياضيات، و تطورها، عبر كل العصور. بمعنى أن النزعة الاقتصادية في الرياضيات هي الوجه الأساسي لدراسة تاريخ الرياضيات، بغض النظر عن أنها إحدى أهم وسائل إقناع الدارس، و خاصة في مراحلها الأولى، بأهمية الرياضيات في جميع مناحي الحياة، العلمية منها، و النظرية. و استعراض الأمثلة الدالة على هذه النزعة في الرياضيات يستلزم استعراض جُلّ المواضيع الرياضية ابتداءً من نظام العد العشري، وصولاً إلى تبولوجيا الجداء، حيث نبحث عن أضعف (أصغر) تبولوجيا تجعل تطبيقات الإسقاط مستمرة، و الجبر التام المولد بجماعة جزئية من مجموعة أجزاء التي يصعب حصرها. و من المرجح أن واحداً من أهم الدوافع النفسية وراء هذه النزعة الاقتصادية هو الشعور بأهمية الزمن عند الإنسان. و هذا الاهتمام بالزمن نابع من يقين الإنسان العميق بأن الموت هو النهاية الحتمية للحياة. فالموت تعظيم للحياة وفق رؤية المعتزلة. و يبدو أن هذه النزعة الإنسانية (الاهتمام بالزمن) كانت أساساً - و ربما في اللاشعور - وراء النزعة الاقتصادية في التفكير الرياضي. و تبلغ هذه النزعة ذروتها في سيرورة الرياضيات في عملية التعميم التي أضحت أهم ما يميز الرياضيات المعاصرة.

إن علاقة الرياضيات باللغة الأم التي يتحدث بها أي شعب علاقة وثيقة، هذا بغض النظر عن أن الرياضيات بحد ذاتها هي " لغة مبنية جيداً " وفق ما يقوله الرياضي والفيلسوف الفرنسي هنري بوانكاريه. وهذه العلاقة تجنح نحو مصلحة اللغة؛ بمعنى أن اللغة أكثر تأثيراً في الرياضيات، أو على الأقل في طريقة فهمنا للرياضيات. و على الرغم مما يمكن أن تقوم به الرياضيات من بلورة بعض معاني ألفاظ اللغة العربية، أو غيرها من اللغات، بيد أن هذا الدور في المحصلة محدوداً جداً (11). غير أن دور اللغة، و تأثيرها، في تطور الرياضيات يصعب حصره، أو حتى تصوره، لأنه كما هو معروف فإن " اللغة تصنعنا أكثر مما نصنعها ". وما يؤكد ذلك هو أن اللغة، أي لغة، تؤدي وظيفة في نمو التفكير الرياضي، و في طبيعته. فإما أن تنشأ جانباً معيناً في هذا التفكير، أو من الممكن أن تقوم بخلاف ذلك، وتضعف جانباً آخر. فإذا سلّمنا بما يقوله الدراسات اللسانية الحديثة حول أن اللغات السامية تميل إلى التأليف المتجبرن، فإن هذا قد يساعدنا في فهم لماذا طلابنا، عموماً، في المدارس في الوطن العربي يجدون الجبر أسهل كثيراً من الهندسة، لكون اللغة العربية إحدى اللغات السامية. يقول الباحث المعروف في تاريخ العلوم عند العرب رشدي راشد : " وفي دراسة حديثة حول الارتداد الدلالي للمفهوم يعرض كيف أن اللغات السامية تميل إلى التأليف المختصر والمجرد " المتجبرن " على نقيض الميل " الآري المهندس ". وبحسب هؤلاء المؤلفين فإن البنية الألسنية هي المسؤولة عن تطور " علم البناءات الجبرية " " (12).

و تقول فرضية " الحتمية اللغوية " Linguistic Determinism التي قال بها الفيلسوف الألماني ولهام همبولدت W.Humboldt في القرن التاسع عشر الميلادي، التي أعيد طرحها من جديد في النصف الأول من القرن العشرين من قبل عالم اللغويات الأمريكي إدوارد سابير E.Sapir : " إن الناس تبع في تفكيرهم و إحساسهم و مشاعرهم و نظرتهم إلى الكون، للعادات التي اكتسبوها من خلال ممارستهم للغة قومهم " (13).

إن واحدة من أبرز المشاكل التي تواجهنا في فهم الرياضيات هي القدرة على التجريد. و ترتبط هذه القدرة ارتباطاً وثيقاً باللغة؛ لأن التجريد اللغوي عند الطفل سابق للتجريد الرياضي. و هذا يقودنا إلى الإشارة إلى أن الثقافات في العالم تقسم إلى قسمين رئيسيين : الثقافة الشفاهية Orality ، و الثقافة الكتابية Literacy ؛ أو بصيغة أخرى، هناك عقلية شفاهية، و عقلية كتابية. و لكل من هذه العقليات ميزات خاصة بهما (14). و من ميزات العقلية الشفاهية، مثلاً، الأسلوب الإطنابي، و تشجيع المبالغة، و طلاقة اللسان، و العبارات الجاهزة، و إرهاق الذهن بعملية الحفظ، و التذكر. و كل هذه الميزات تولد حالة ذهنية تبعد الإنسان عن محاولات التجريب العقلي. و هي في النتيجة متناقضة مع التفكير الرياضي، و في تحصيله، و خاصة مع النزعة الاقتصادية فيه.

و من أهم ما يميز العقلية الكتابية أنها تنمي القدرة على التجريد. يقول والترج أوتج في كتابه " الشفاهية والكتابية " : " إنها تفصل العارف عن المعروف، في حين تضع الشفاهية المعرفة في سياق الصراع بإبقائها في عالم الحياة الإنسانية " (15). و يصعب على أصحاب الثقافات الشفاهية التفكير باستخدام المفاهيم، لأن استخدام المفاهيم يعد نوعاً من التجريد. لذلك يستخدم هؤلاء المفاهيم في السياقات التي وردت فيها، و يصعب عليهم انتزاعها من تلك السياقات. و الثقافة الشفاهية لا تعترف بالمنطق الصوري، في حين أن المنطق ملازم للثقافة الكتابية. وهذه كلها تمثل عقبات كأداء في تعلم الرياضيات، و في نموها.

و لتبيان أثر الجوانب النفسية، و الاجتماعية، في ولادة بعض المفاهيم الرياضية سنستعرض جزءاً من حياة الرياضي جورج كانتور كونها أنموذجاً.

فقد اتسمت حياة جورج كانتور (G.Cantor) (1845- 1918 م) بالتنوع في كل شيء، ابتداءً من جذوره، مروراً بخلفيته الدينية، و انتهاءً باهتماماته العلمية. حيث ولد كانتور في مدينة بطرسبيرغ في روسيا من أبوين ينحدر أصلهما من الدانمارك. ثم انتقلت عائلته إلى فرانكفورت في ألمانيا عندما كان عمره أحد عشر عاماً. و عاش في وسط أسري تميز بتلاقح بعض الثقافات الدينية المختلفة. و هذا أثرى فكره الديني منذ نعومة أظفاره، كما أفضى ذلك إلى أن يبدي، في تلك الفترة، اهتماماً كبيراً في الفلسفة، و بعض نواحي علم اللاهوت. و قد خص منها مفاهيم الديمومة (الاستمرار، أو الاتصال) (Continuity)، و اللامتناهي (Infinity). بيد أنه لم يلق تشجيعاً من أسرته، بل حاول والده ثني عزيمته عن ذلك، و حضه على دراسة الهندسة. غير أن هذه الاهتمامات لم تكن عبثاً طفولياً عارضاً، لأنها لم تذهب أدراج الرياح، ولم تطوها تلافيف الزمن. بل كانت جملة من الإرهاصات التي آلت، بفعل معارضة الأهل، إلى رواسب فكرية بقيت كامنة في دائرة اللاشعور إلى أن أضحت خميرة إنجازاته الرياضية اللاحقة. و يتضح هذا من خلال حل واحدة من أقدم المعضلات الرياضية، و هي أبحاثه حول اللانهاية. فقد ترجم فيها رغبته المكبوتة في دراسة علم اللاهوت. و قاده حلمه الطفولي إلى تحقيق الحلم الذي ما برح دائرة اهتمام الرياضيين، و الفلاسفة، ردهاً من الزمن.

كانتور و اللانهاية

و في عام 1872 م نشر الرياضي الألماني ديدكند (Dedekind) (1831- 1916 م) بحثاً عرّف فيه المجموعة غير المنتهية. حيث نقول عن " نظام " إنه غير منته إذا كان " يكافئ " جزءاً فعلياً من نفسه، و في خلاف ذلك نقول : إن النظام منته. و هذا التعريف يصاغ حالياً بلغة نظرية المجموعات بقولنا : تكون المجموعة غير منتهية إذا أوجدنا تقابلاً (bijection) (تابع متباين، و غامر) بينها و مجموعة جزئية تماماً (فعلية) منها. و بعد ذلك بعام اكتشف كانتور أن ثمة تقابلاً بين مجموعة الأعداد الطبيعية، و مجموعة الأعداد المنطقية (العادية) الموجبة، الذي يمكن التعبير عنه بالمبرهنة التالية : إن مجموعة الأعداد العادية الموجبة عدودة (قابلة للعد) (Countable).

و في عام 1874 م نشر كانتور أكثر بحوثه ثورية في الدورية العلمية (Crelle's Journal) حيث بين أن مجموعة الأعداد الحقيقية غير عدودة (غير قابلة للعد) (Uncountable)، و هو أول من لاحظ تباين درجات اللانهاية، و من ثم فإنه ليست كل المجموعات غير المنتهية سواسية، كما كان يظن، أي أن لها " القياس " نفسه. و في عام 1890 م أوجد برهاتاً آخر لعدم قابلية مجموعة الأعداد الحقيقية للعد، و هو أبسط من برهان سابق أوجده. و هذا البرهان هو المتداول حالياً في كتب التحليل الرياضي.

و من النتائج المثيرة للدهشة في أعمال كانتور أن " البعد " ليس له علاقة " بقدرة " المجموعة (Set Power). فمثلاً، إن " قدرة " مجموعة نقاط قطعة مستقيمة طولها واحدة الأطوال لا تختلف عن " قدرة "

مجموعة نقاط مربع مساحته واحدة المساحات, و لا تختلف عن " قدرة " مجموعة نقاط مكعب حجمه واحدة الحجم. و الأكثر من ذلك فإنها لا تختلف عن " قدرة " مجموعة نقاط الفضاء الإقليدي بأكمله.

و هذه النتائج قادت إلى تأسيس نظرية المجموعات (Set Theory) كنظام (Discipline) رياضي قائم بذاته. و كان يطلق عليها في مرحلة النشوء اسم (Theory of assemblages). و تكمن أهمية هذه النظرية في أنها أرخت بظلالها على رياضيات القرن العشرين, خاصة على المنطق, والتبولوجيا, و التحليل الرياضي. و منشأ ذلك أن الكائنات الرياضية لا تُدرس ككائن فردي قائم بنفسه, بل كعناصر في مجموعة, أو في تجمّع قد يحتوي على عدد نهائي من الأشياء من النوع نفسه. لذلك أضحت معظم الرياضيات الحديثة – كما هو معروف – تصاغ بلغة نظرية المجموعات.

و على الرغم من عظمة هذا الإنجاز الرياضي الكبير فإننا لا نجد اهتماماً كافياً بدراسة الدوافع النفسية, و الاجتماعية, لهذا الاهتمام بعوالم اللانهائيات عند كانتور, على الرغم من أن بعض مظاهر هذه الدوافع كانت بادية للعيان. خاصة و أن الدراسات النفسية تشير إلى أن ثمة رابطاً بين الميل إلى مفهوم التناهي و اللانهائي و عديد من الجوانب الإنسانية (لمزيد من المعلومات انظر مادة تناه – لا تناه في الموسوعة الفلسفية العربية (معنى زيادة), الصادرة عن مركز الإنماء العربي- بيروت).

و عالم " اللانهائية " هو الروح التي تمنح الحياة للرياضيات, و لفكرها. و قد اتضح ذلك عندما استبعد بعضهم هذه المفاهيم من الرياضيات نتيجة استعصانها على الرياضيين, و الفلاسفة, رداً من الزمن, و خلصوا إلى أن الرياضيات ستكون حينها غير مجدية, و نطاقها ضيق جداً.

و قد كانت الديانات القديمة تردد عبارة : " يوجد عدد أخير, و لكن الإنسان لا يستطيع الوصول إليه لأنه ينتمي إلى الآلهة ", و لذلك فإنه من غير المستبعد أن يكون اهتمام الأقدمين بعالم اللانهائيات مؤشراً على العجز الإنساني.

و ربما كانت بعض إنجازات كانتور قد نسجت من روح صاحبها للتشابه: تشبیر بينهما, و لتبقى شاهداً حياً على مأساته الشخصية. فنظرية المجموعات تنطق بشخصية مبدعها, لأنه على الرغم من عظمتها, و أصالتها, فقد حفلت ببعض المحيررات التي كادت أن تقضي عليها. كذلك كانت شخصية كانتور العظيمة بالوقت نفسه. كما أنه لم تتضح فائدة هذه النظرية, و عمق تأثيرها, في الرياضيات, و في غيرها من الحقول المعرفية, إلا مع مرور الزمن. و هذا كان حال كانتور مع معاصريه, و مع من أتوا بعده من الرياضيين. و لولا الجهود الحثيثة التي قام بها عديد من الرياضيين في النصف الأول من القرن العشرين لآلت هذه النظرية إلى ما آل إليه كانتور. لذلك فلا غرو إذا قلنا إن كانتور هو الرجل الذي كان ضحية علمه!

الحواشي :

- (1) - انظر " الأخلاق و الرياضيات " دراسة قدمت إلى مؤتمر الرياضيات السادس في الأردن - جامعة اليرموك , 2004, أو انظر : مجلة المعرفة (وزارة الثقافة- سورية), العدد 513.
- (2) - نيكولا بورباكي : اسم مستعار لجماعة من الرياضيين الشباب معظمهم من فرنسا, تأسست في مطلع الثلاثينيات من القرن العشرين.
- (3) لمزيد من المعلومات انظر: كتاب " الهندسة "، David A. Brannan & others ترجمة: د. مها النبهان, ود. محمود باكير، المركز العربي للتعبير والترجمة والتأليف والنشر (دمشق)، 2001.
- (4) - قوانين الفكر الثلاث : قانون الهوية, و قانون عدم التناقض, و القانون الثالث المرفوع.
- (5) - لمزيد من المعلومات انظر " جغرافية الفكر " تأليف ريتشارد إي . نيسبت, ترجمة : شوقي جلال, علم المعرفة (الكويت) 321, شباط 2005.
- (6) - المرجع السابق : الصفحة 54.
- (7) - المرجع السابق : الصفحة 49.
- (8) - المرجع السابق : الصفحة 45.
- (9) - المرجع السابق : الصفحة 49.
- (10) - هذه مسألة خلافية في فلسفة الرياضيات : هل الرياضيات تُكتشف, أم تُخترع؟
- (11) - من هذه الألفاظ على سبيل الذكر لا الحصر : الأبعاد, المعادلة, و الإسقاط, وغيرها.
- (12) - " تاريخ الرياضيات العربية "، رشدي راشد, ترجمة : حسين زين الدين، مركز دراسات الوحدة العربية (بيروت) 1989، الصفحة 64. ويقصد رشدي راشد بهؤلاء المؤلفين الكاتبين L. Massignor & M. Arnaldz.
- (13) - انظر مجلة عالم الفكر (الكويت) , مج 28, العدد 3, يناير- مارس 2000, الصفحات 9- 28.
- (14) انظر " الشفاهية والكتابية "، والترج أو نج، ترجمة: حسن البنا عز الدين، عالم المعرفة (182)، الكويت، الصفحة 47 وغيرها.
- (15) - المرجع السابق، الصفحة 44.

فلسفة الرياضيات و ضرورتها في تاريخ الرياضيات *

د. محمود باكير

"فلسفة العلم بدون تاريخ العلم خواء، و تاريخ العلم بدون فلسفة العلم عماء"
الفيلسوف الألماني كانت Kant

إن دراسة تاريخ الرياضيات أضحيت على قدر كبير من الأهمية لدارس الرياضيات خصوصاً، و للمهتم بالثقافة الإنسانية عموماً، لأن "رياضيات أي عصر هي مؤشر على ثقافته"، وفق ما يقول بعضهم. ولكي يؤدي هذا التاريخ دوره المعرفي الطبيعي لا بد من توضيح أهمية فلسفة الرياضيات ضمن تاريخ الرياضيات كمحصلة للصلة الوثيقة، والعلاقة العضوية، القائمة بين فلسفة الرياضيات و تاريخها. لأن بعض مؤرخي الرياضيات - و خاصة من أصحاب الرؤية التقليدية للعلم - يورخونها بطريقة وصفية، حيث تسرد الأحداث، و التطورات الرياضية المختلفة، بعيداً عن دوافعها الإنسانية الكامنة، أو يربطها بمختلف العلوم، و خاصة مع فلسفة الرياضيات. إن دراسة تاريخ الرياضيات بهذه الطريقة - و على الرغم مما تقدمه من معلومات - فإنها دراسة "ساكنة" و سطحية للنتائج الرياضية. أو باختصار، ينصب الاهتمام على ما يطفو على السطح دون الغوص في أغوار الأعماق، للبحث عن مسيات تلك النتائج ودوافعها غير المرئية، و هذا ليس انتقاصاً من شأن هذه الدراسات. و هي - ببساطة - قد تكون أقرب إلى دراسة الرياضيات تاريخياً من دراسة تاريخ الرياضيات بمعناه الواسع الذي يفى بالغرض المعرفي. فضلاً عن أن هذه الطريقة تنطوي على نزعة ميكانيكية، حيث تستنتج التطورات اللاحقة من السابقة، وفق روح الممكنة (نسبة إلى الماكينة). و لما كانت الرياضيات، وفق ما يقوله الفيلسوف الفرنسي ليون برنشفيك (1869 - 1944)، هي أعلى درجة وصل إليها الفكر الإنساني، فإنه يصعب دراستها على أنها مجرد تطورات متوالية، ذات طابع ميكانيكي، بعيداً عن سياقها الإنساني. و خاصة بعد أن بينت مبرهنات اللاتمام *Incompleteness Theorems* للمنطقي الأمريكي (النمساوي الأصل) كورت غودل Kurt Godel (1906 - 1978) أن العقل الإنساني أقل ميكانيكية مما كان يعتقد سابقاً، فكيف حال الفكر الرياضي الذي يُنتج هذا العقل، و يُعد ملتقى لعدة مشارب معرفية. في حين نجد أن ثمة اتجاهات ثانياً حديثاً لتاريخ الرياضيات، يعتمد طريقة التحليل، و ربط التطورات الرياضية مع مختلف الحقول المعرفية، و على نحو خاص بفلسفة الرياضيات. و هذا يأتي تعبيراً عن النزعة الحديثة التي بدأ العلم يجنح إليها، و هي الإقرار بوحدة المعارف البشرية، و تكاملها. و هذا أفضى إلى تلاقح عديد من الاختصاصات، الذي بدأ ينتشر على نطاق واسع في عصرنا الحاضر.

و مما تقتضيه فلسفة الرياضيات، أساساً، هو محاولة إعادة بناء المعارف الرياضية المبعثرة، و المترامية، عبر العصور، بحيث تتبلور ضمن ترتيب معين، أو وفق معنى محدد. و هذا يشير إلى العلاقة الخاصة بين تاريخ الرياضيات و فلسفتها. بل إن بعضهم يُعدّ تاريخ العلوم المرحلة الأولى التي تمر بها فلسفة العلوم، حيث المرحلتان التاليتان هما: مناهج البحث العلمي، و الإبيستمولوجيا (النقد العلمي للمعرفة).

ويطلق كثيرون اسم فلسفة العلوم على شكل من أشكال المنطق الذي يطبق التحليل النقدي الواعي على العلم. و في الموسوعة البريطانية المعروفة بريتانيكا (Britannica) نجد أن أصول (أسس) الرياضيات *Foundation of Mathematics* تعد جزءاً من تاريخ الرياضيات. و تذكر أن التساؤل حول طبيعة الرياضيات، و فرضياتها التحتية (الضمنية)، و آفاقها، هي ما يعرف باسم دراسة أصول الرياضيات. و في

الوقت ذاته تعرّف بريتانكا فلسفة الرياضيات على أنها: " دراسة طبيعة الرياضيات, بما فيها الفرضيات التحتية للأنظمة الرياضية, و آفاقها ". أي نلاحظ أن ثمة تطابقاً بين فلسفة الرياضيات, و أصولها. لذلك فلا غرابة إذا علمنا أنه يشترط في دارس تاريخ العلوم أن يجمع بين شخصيات مختلفة كل الاختلاف: شخصية المؤرخ, و شخصية العالم, و شخصية الفيلسوف (1). و مما يعزّز العلاقة بين فلسفة الرياضيات, و تاريخها, أن تطور الرياضيات بحد ذاته لم يكن بعيداً - في بعض جوانبه - عن الدوافع الفلسفية لبعض الرياضيين, و خاصة عند أولئك الذين جمعوا بين الرياضيات و الفلسفة, و هؤلاء ليسوا قلة. بل حتى إن بعضهم ذهب بعيداً في مساعاه حينما غلب الجانب الفلسفي على الجانب الرياضي عندما كان يشعر أن ثمة تعارضاً بين الجانبين. فعلى سبيل الذكر لا الحصر, نشر الرياضي و الفيلسوف الهولندي بروور (L.E.J. Brouwer) (1881 - 1966) بحثاً بعنوان: " التصحيح الحدسي لمبرهنة النقطة الثابتة " An intuitionist correction of the fixed point theorem عام 1952 أنكر فيه وجود النقطة الثابتة في مبرهنته المعروفة (مبرهنة بروور للنقطة الثابتة) المنشورة عام 1910, و أثبت أن ثمة نقطة ϵ - ثابتة من أجل كل $\epsilon > 0$. و ما قام به بروور هو هدم واحدة من أهم منجزاته الرياضية في أيام شبابه لدواع فلسفية. علماً أن مبرهنته تلك تعد واحدة من أهم مبادئ الوجود في الرياضيات, و لها عديد من التطبيقات في المعادلات التفاضلية, و التحليل التابعي (الدالي), و نظرية المبارزة (الألعاب), و الاقتصاد. فضلاً عن ذلك, فقد كان لولادتها تأثير بين في تطور بعض فروع الرياضيات, التي من أبرزها التوبولوجيا الجبرية Algebraic topology. وقد حصل الأمريكي جون ناش John Nash على جائزة نوبل في الاقتصاد عندما استخدم هذه المبرهنة في حساب " نقطة التوازن " في الاقتصاد, و في نظرية المبارزة. و مبرهنة بروور للنقطة الثابتة هي تعميم لمبرهنة القيمة المتوسطة (Intermediate value theorem) للتتابع المستمرة التي أثبتها الرياضي و الفيلسوف الإيطالي (التشيكي الأصل) بولزانو (B.Bolzano) (1781-1848) عام 1817. و كانت دوافع بروور في ذلك الإنكار أن مبرهنة بولزانو - فايرشتراس Bolzano Weierstrass مرفوضة في إطار الرياضيات الحدسية (intuitionistic mathematics) التي كان هو من أبرز روادها (2).

و يظن بأن نظام العد الثنائي, عصب الحاسوب (الكمبيوتر) الآن, قد جذب إليه الرياضيين الفلاسفة من أمثال الرياضي والفيلسوف الألماني لايبنتز (G.W.Leibniz) (1646 - 1716) قبل أن يجد له مكاناً في الرياضيات. فقد كان عشاق هذا النظام يرون فيه صورة الخلق, وفق رأي الرياضي الفرنسي لابلاس. و هذا يعني أن كثيراً من المفاهيم الرياضية ذات جاذبية فلسفية قبل أن يكون لها جاذبيتها الرياضية, بل قد تكون جاذبيتها الفلسفية أكثر وقعاً, و سحراً, عند بعضهم. و ربما يعزى هذا إلى أن الجانب الفلسفي في تلك المفاهيم يمثل روحها, و منه تستمد وهجها, و إشعاعها الفكري.

ومن الأمثلة, على سبيل الذكر لا الحصر, التي تبين علاقة البعد الفلسفي بالبعد المنطقي, ما قام به كورت غودل في نظريته (مبرهنتي اللاتمام Incompleteness Theorems) في الفترة (1930-1931) التي كانت جزءاً من بحثه للدكتوراه في جامعة فيينا. و يصعب استعراض النتائج العلمية, والفكرية, لهذا الفتح العلمي الكبير في هذا المقال. بيد أنه من أهمها المقالة التي كتبها الرياضي والمنطقي البريطاني آلان تورينج Alan Turing (1912-1954) عام 1936 التي كانت نتيجة, أو إعادة صياغة, لنظرية غودل. وقد توج كل ذلك بما أضحي يسمى " آلة تورينج " Turing Machine في أدبيات علوم الحاسوب Computer Science, وفي فلسفة العقل. وهي ليست آلة بالمعنى الحرفي للكلمة, بل هي تصور رياضي مجرد, وفق ما يقول جون ر. سيرل في كتابه " فلسفة العقل..مدخل موجز ". و يقول جون ماكلش في كتابه " العدد " عن هذه الآلة: " إن الصفة الأساسية التي تتصف بها آلة تورينج هي أنها لا تعالج فقط الأعداد, ولكن يمكن توسيع عملها ليشمل كل ما يمكن للبشر أن يفعلوه ". هذا وقد تابع تورينج عمله فصمم أول حاسوب إلكتروني عندما كان يعمل في مانشستر (بريطانيا) وسميت هذه الآلة Ace, وذلك في نهاية الأربعينيات من القرن المنصرم. و يكفي الإشارة إلى أهمية هذه الآلة هو أن الحاسوب عبارة عن آلة تورينج. و من المفيد الإشارة إلى أن علماء الرياضيات, عادة, لا يفصحون عن الأسباب التي ألهمتهم بأعمالهم الفذة, ومع ذلك, فقد قال غودل مرة للفيلسوف الأمريكي (الصيني الأصل) هاو وانغ Hao Wang (1921-1995): " إن ما ألهمه لنظريته هو إدراكه أنه لا يمكن وصف " الحقيقة " على نحو منته ".

و من أبسط الأمثلة الدالة على علاقة تاريخ الرياضيات بفلسفتها هو أننا عندما نستعرض تاريخ ولادة نظرية المجموعات على يد الرياضي جورج كانتور (G. Cantor) (1845 - 1918), و ما حملته من محيريات (مفارقات) (Paradox) في فترة مخاضها في مطلع القرن العشرين, لابد من الوقوف عند طرق معالجة تلك المحيريات, من خلال المدارس الفلسفية المختلفة التي حاولت تناول ذلك الموضوع. و نخص بالذكر محيرة برتراند رسل (B. Russel) (1872 - 1970) القديمة - الحديثة التي كان لإعادة بعضها في مطلع القرن العشرين إثارة كثير من الجدل, و الانقسام الحاد بين الرياضيين, في تلك الفترة حول أفكار جورج كانتور. لأنه من المعروف أن أسلوب معالجة المحيريات قد تبلور في ثلاث مدارس فلسفية تعنى بفلسفة الرياضيات. و على الرغم من أن نشأة هذه المدارس تعود إلى ما قبل هذا التاريخ بيد أن أزمة المحيريات, و ما أثارته من مشاكل, قد ساهمت في إنضاج هذه المدارس, و تأطيرها, و كانت القضية التي كبرت بها. و قد شرع ببناء عدة نظريات للمجموعات خالية من المحيريات. و من أبرز تلك المحاولات, و أكثرها قبولاً اليوم, نظرية المجموعات المبنية على الطريقة الموضوعاتية (axiomatic method) (التي تنطلق من جملة من الموضوعات الرياضية), و المعروفة حالياً بموضوعات زرميلو - فرانكل (Zermelo - Fraenkel) لنظرية المجموعات (وهي تسع موضوعات, و هناك خلاف حول التاسعة منها, وهي موضوعة الاختيار).

و إذا بقينا في إطار نظام الموضوعات (axiom system), الذي أضحي الآن أهم ملمح من ملامح الرياضيات الحديثة, فإن أي دراسة لتاريخ الموضوعة (المسلمة), أو البديهية, أو المصادرة (Postulate), منذ الرياضي الإغريقي إقليدس في كتابه ذائع الصيت " الأصول " (في القرن الثالث قبل الميلاد) إلى يومنا هذا, فإن ذلك يستدعي حضور الكثير من فلسفة الرياضيات. و سينتهي بنا المطاف عند أزمة الرياضيات في نهاية القرن التاسع عشر الميلادي, لما كان لتلك الأزمة من تأثير عميق في الفكر الإنساني عامة, و الفكر الرياضي خاصة, و لما حملته من إرهابات على تطور الرياضيات. فقد نبهت تلك الأزمة إلى ضرورة التحليل الدقيق للمفاهيم الرياضية التي كانت تبدو بسيطة في مظهرها, و إلى إعادة النظر في ما كان يسمى من " بديهيات " و " مصادرات " و مدى وضوحها. و كان كل ذلك إيذاناً بفتح علمي أدى إلى ولادة ما يعرف اليوم بالهندسات اللاإقليدية. فضلاً عن ذلك فإن أي دراسة لرحلة الإنسان من المنتهي إلى اللامنتهي من عهد زينون الإيلي (Zenon of Elea) (توفي 430 ق . م) مروراً بالقديس توماس الأكويني (St . Thomas Aquinas) (1225 - 1274) وصولاً إلى جورج كانتور, و ديدكند (Dedkind) (1831 - 1916), نجد أن البعد الفلسفي كان أكثر حضوراً من البعد الرياضي (هذا إذا استطعنا الفصل بينهما). بل و الأكثر من ذلك, فإن لهذه المسألة بعداً آخر هو البعد اللاهوتي الذي اكتسبته عبر مسيرتها الشاقة, و الطويلة. فبعد أن نشر كانتور عام 1874 بحثاً بين فيه أنه ليس فقط " عدد " (أصلي, أو رئيسي cardinal أو قدرة مجموعة) الأعداد المتناهية (الطبيعية) غير منته, بل أيضاً فإن " عدد " أو أصلي الأعداد الموعلة transfinite numbers هو غير منته. بل والأكثر من ذلك, فإن بعض دارسي علم اللاهوت قد أبدوا في حينه قلقهم من أن يكون التحليل الرياضي للأعداد الموعلة, بصورة ما, شكلاً من أشكال التعرض للذات الإلهية, أو نوعاً من التجديف.

و من أجل دراسة تاريخية أعمق لمنجزات كانتور حول حل واحدة من أقدم المعضلات الرياضية, و نعني أبحاثه حول الأعداد الموعلة, لابد من العودة إلى طفولته. فقد ولد كانتور في وسط أسري تميز بتلاقح بعض الثقافات الدينية المختلفة. و هذا, كما يبدو, أفضى إلى أن يبدي اهتماماً كبيراً في بعض نواحي علم اللاهوت, مثل مفاهيم الديمومة (الاستمرار أو الاتصال) (continuity) (يستخدم العهد القديم الكلمة العبرية " عولام " للدلالة على الدوام والاستمرار), و اللامتناهي (infinity). بيد أنه لم يلق تشجيعاً من أهله لدراسة الفلسفة, بل حاول والده ثني عزمته عن ذلك بحضه على دراسة الهندسة. و تفادياً لهذا النزاع اختار كانتور حلاً وسطاً, هو دراسة الرياضيات. بيد أن هذه الاهتمامات بقيت كامنة في تفكيره, إلى أن أضحت خميرة إنجازاته الرياضية اللاحقة عن " اللاتهاية " التي كانت من أهم إرهابات ولادة نظرية المجموعات التي طبعت الرياضيات الحديثة بطابعها. فقد ترجم توقه المكبوت في دراسة علم اللاهوت إلى أبحاث رياضية. و

قاده حلمه الطفولي إلى تحقيق الحلم الذي ما برح دائرة اهتمام الرياضيين، و الفلاسفة رداً من الزمن (3) . و من الجدير بالذكر أن دوافع معظم من حارب كانتور، و أفكاره، من معاصريه كانت فلسفية. و إذا بقينا في " الفردوس الذي أبدعه كانتور، الذي لن يستطيع أحد طردنا منه " - وفق قول هيلبرت - فإننا لا نستطيع دراسة واحدة من أشهر المسائل خلافية في الأدبيات الرياضية، و هي سيرورة (عملية) كانتور القطرية (Cantor's diagonal process)، المعروفة في التحليل الرياضي، و الجبر، و المستخدمة في إثبات أن مجموعة الأعداد الحقيقية غير عدودة (غير قابلة للعد uncountable) إلا بالعودة إلى الإطار الفلسفي.

و أي إجابة حول التساؤل المشروع : ما هي طبيعة الرياضيات؟ و ما هي طبيعة الفرضيات التحتية في الأنظمة الرياضية؟ فإنه لا بد من التعرّيج على المدارس الفلسفية المختلفة حول طبيعة الرياضيات لمقاربة تلك الإجابة. فمن المعروف أن هذا السؤال بحد ذاته خلافية، و إجابته تختلف من مدرسة إلى أخرى. فالمدرسة الصورية (Formalist) التي كان يقودها الرياضي الألماني ديفيد هيلبرت David Hilbert (1862-1943) تقول : إن الرياضيات ليست أكثر من لعبة دون معنى، تُلعب بإشارات ورموز عديمة المعنى، وفقاً لقواعد صورية معينة متفق عليها مسبقاً. في حين تقول المدرسة المنطقية (Logistic) التي روادها البريطانيان رسل و وايتهد (A.N.Whitehead) من أن : الرياضيات رجولة المنطق، و المنطق شباب الرياضيات، و يجب صوغ كل المفاهيم الرياضية باستخدام المفاهيم المنطقية. في حين نجد أن المدرسة الحدسية (Intuitionist) مؤسسها بروور تشير إلى أن نبع الرياضيات يكمن في الحدس الذي يعمل على توضيح المفاهيم الرياضية، وأنه لا يمكن ترميز الرياضيات على نحو كامل، و أن التفكير الرياضي مستقل عن اللغة التي تستعمل للتعبير عنه. و أن البيان الذي يبنى بوجود كائن ما وذي خواص معينة، يعني أن هناك طريقة معروفة تمكنا من إيجاد، أو إنشاء، هذا الكائن بواسطة عدد منته من الخطوات.

و دراسة تاريخ الرياضيات قد أضحت لا تستدعي فلسفة الرياضيات فحسب، بل إنها كثيراً ما تستدعي استحضار علم اللسانيات، و علم النفس، و علم الاجتماع، و غير ذلك من الحقول المعرفية. و آخرها - على الأقل في الفترة الحالية - سوسيولوجيا الرياضيات، أو علم اجتماع الرياضيات (Sociology of Mathematics). و هذا العلم، الذي بدأ يشق طريقه بين العلوم منذ الأربعينيات من القرن العشرين، يهتم بدراسة تأثير النظم الاجتماعية المختلفة على جذور المفاهيم الرياضية، و على نموها. إضافة إلى تأثير هذه النظم على الطرق الرياضية، و على دور الرياضيات كجزء من البنية الاجتماعية، و الاقتصادية، في الحقبة المدروسة. كما يدرس هذا العلم كيفية تأثير الأنظمة السياسية (رأسمالية و غيرها)، و على نحو مختلف، على طريقة اكتساب المعارف الرياضية. فلدراسة، مثلاً، أثر التجارة على الرياضيات انظر :

Mathematical problems in relation to the History of Economics and Commerce ,
D.E.Smith , A.A.M .

و في هذا الإطار نستطيع فهم قول بعضهم بأن " رياضيات أي عصر هي مؤشر على ثقافته " . و هذا ربما يحرض بعضنا على إعطاء بعض الانطباعات " الشخصية " الأولية حول رياضيات بعض الدول، في حقب زمنية معينة. و هذا الرأي ليس نتيجة علمية مبنية على البحث و التحري الدقيق اللازمين لذلك، بل قد لا يعدو كونه توقعاً شخصياً تكون عن بعد، و قابلاً للتحري، و التمحيص. فنلاحظ، مثلاً، أن رياضيات دول أوروبا الشرقية في زمن الاتحاد السوفيتي - ربما باستثناء بولونيا التي كان لها خصوصيتها - كانت تتسم " بالواقعية "، و تركز على الجوانب التطبيقية منها أكثر من الجوانب النظرية. لهذا كانوا يحرصون على الجانب النفعي المباشر منها في خدمة التقدم الصناعي، و في حل كثير من المشاكل العلمية، و العملية، و العسكرية، التي تصادفهم. لذلك نلاحظ أن نشاطهم الرياضي تركز على التحليل الرياضي، و خاصة المعادلات التفاضلية، و التحليل العددي، مثلاً، أكثر من الجبر المجرد، و نظرية القياس، و التبولوجيا، و غير ذلك. حتى أنهم لم يذهبوا بعيداً، أو يغالوا في تجريدهم، في الجبر المجرد، مثلاً، كما في دراسة أنصاف الزمر التبولوجية (أو أنصاف التبولوجية المستمرة من إحدى الجهتين اليمين، أو اليسار، فقط) في التحليل التابعي (الدالي) كما في بريطانيا، وأمريكا. في حين كانت الرياضيات الفرنسية، و إلى حد ما البريطانية، مغممتين بالجوانب النظرية. وقد وازن هولاء بين الرياضيات البحتة (التي تتطلب قدراً كبيراً من التجريد)،

والرياضيات التطبيقية. إضافة إلى ذلك فقد ركز الفرنسيون على الجوانب التوحيدية في الرياضيات (وخاصة مع تأسيس جماعة نيكولا بورباكي), ونعني على المواد الرياضية التي كانت تؤدي دور الموحّد لفروع الرياضيات المختلفة. لذلك كانت دراسة البنى الرياضية (جبرية, و تبولوجية, وغيرها) في بزرة اهتمامهم. وباختصار, فإننا نجد صدى للأنظمة السياسية, أو الاجتماعية, أو الثقافية, السائدة في المجتمعات المولدة للمعرفة الرياضية, في الإطار الرياضي.

و على الرغم من أن علاقة فلسفة الرياضيات بتاريخها قديمة العهد, و هذا بالطبع ما تقتضيه البداهة – إن كان هناك بداهة بالمعنى الرياضي – من أنه من أجل دراسة تاريخ أي علم لابد من العودة إلى أصوله, و أسسه, و إعادة ترتيب بناء معارفه. و هذا يتضح جلياً, على نحو خاص, في دراستنا للرياضيات في القرنين المنصرمين. و ما يشفع لهذه الرؤية (ترابط فلسفة الرياضيات بتاريخها) أن تاريخ الرياضيات موجه, أساساً, لدارسي العلوم الرياضية؛ أي أن جزءاً كبيراً من الخلفية الرياضية المطلوبة متوفرة, إلى حد ما, عند الدارس. مع أن تاريخ الرياضيات يجب أن يهتم به كل من هو معني بالشأن الثقافي الإنساني بمعناه الواسع, لما تنطوي عليه الرياضيات من منجم معرفي عن الإنسان.

و أخيراً نشير إلى أنه لابد من التذكير بأنه يجب أن نوازن في دراستنا بين الجانب التاريخي, و العلمي, و الفلسفي, و أن لا يطغى جانب على آخر. حيث نجد في بعض المؤلفات طغيان جانب على آخر, و خاصة الجانب التاريخي على العلمي, كونه أسهل الجوانب.

* دراسة مقدمة في الندوة المنعقدة في جامعة البعث (حمص) – سورية 23- 24 نيسان (أبريل) 2003
حول تاريخ الرياضيات.

الحواشي :

1. لمزيد من المعلومات انظر: " المنطق و فلسفة العلوم " , بول موى, ترجمة فؤاد حسن زكريا, دار العروبة للنشر و التوزيع (الكويت), 1401 هـ - 1981 م . الصفحة 48-49 .
2. انظر مثلاً :
Lecture Notes Series , No . 28 , Seoul National University , Seoul , Korea , p 69
3. انظر : " كانتور بين إنجازاته الفذة و مصيره المحزن " , د. محمود باكير, مجلة أفكار (الجمعية السعودية للعلوم الرياضية) , العدد 6 , 1996 .

ملحق بالمحاضرات

مقرر : تاريخ الرياضيات (قسم الرياضيات) , العام الدراسي 2016-2017

كتب و مقالات مفيدة كمراجع للمقرر:

(معظمها موجود في الشبكة العالمية للمعلومات.(الإنترنت))

1- " تاريخ الرياضيات العربية بين الجبر والحساب " , د. رشدي راشد, مركز دراسات الوحدة العربية (بيروت), ط1, 1989.

2- " رياضيات الخوارزمي..تأسيس علم الجبر " , د. رشدي راشد, ترجمة : د. نقولا فارس, مركز دراسات الوحدة العربية (بيروت), ط1, 2010.

3- " دراسات في تاريخ العلوم العربية وفلسفتها " , د. رشدي راشد, مركز دراسات الوحدة العربية (بيروت), ط1, 2011.

4- A History of Mathematics, Carl B. Boyer, Princeton University Press.

5- Mind Tools, Rudy Rucker, penguin Books .

خاصة من الصفحة 31 حتى 35 History of Ideas

6- " الرحلة من كذبة أبريل إلى الحاسوب " , د. محمود باكير, مجلة العربي (الكويت), العدد 696, نوفمبر 2016.

7- " الرياضيات منهجاً للتفكير " , د. محمود باكير, مجلة العربي (الكويت), العدد 689, أبريل 2016.

8- " الأخلاق والرياضيات " , مجلة المعرفة (وزارة الثقافة - سورية), العدد 513, حزيران 2006.

9- دراسات لغوية من منظور رياضي " , د. محمود باكير, جامعة دمشق, الأدب العلمي, 2015.

10- " العدد.. من الحضارات القديمة حتى عصر الكمبيوتر " , جون ماكلش, ترجمة : د. خضر الأحمد, و د. موفق دعبول, عالم المعرفة (الكويت), 1999.

The American Mathematical Monthly, Vol. 57, No.4, Apr. -11
1950,pp.221 -232

يتحدث عن معمارية الرياضيات بقلم : نيكولا بوروباكى.
12- " المنطق وفلسفة العلوم " ، بول موى ، ترجمة: د. فؤاد حسن زكريا، دار العروبة للنشر
والتوزيع (الكويت)، 1401 هـ = 1981 م.

أسئلة :

يمكن الإجابة على هذه الأسئلة بعد قراءة المحاضرات

(الإشارة * للدلالة على صعوبة السؤال)

- 1- ما هو الفرق بين البديهية, والمسلمة, والموضوعية, و المصادرة, من وجهة نظر الرياضيات قديماً وحديثاً؟
- 2- هل تعتقد أن دراسة تاريخ الرياضيات مهمة في دراسة الرياضيات؟ ولماذا؟
- 3- هل تعتقد أن فلسفة الرياضيات مهمة في دراسة تاريخ الرياضيات؟ ولماذا؟
- 4- * يقول مؤرخو الرياضيات بأن : " رياضيات أي عصر مؤشر على ثقافته ". ما هو رأيك بهذا القول مع التبرير؟ هل يمكن أن تضرب بعض الأمثلة؟
- 5- ما هو تعريف " أصول الرياضيات "؟ وما هي علاقتها بتاريخ الرياضيات؟
- 6- ما هي سلبيات دراسة تاريخ الرياضيات بعيداً عن دوافعها الإنسانية؟
- 7- * يقول ليون برنشفيك : " إن الرياضيات أعلى درجة وصل إليها الفكر الإنساني ". لماذا الرياضيات سابقة للحقول المعرفية الأخرى؟ أي ما هي السمات التي تملكها الرياضيات ويفتقدها غيرها؟
- 8- ماذا تقتضي فلسفة الرياضيات, وما هي علاقتها بتاريخ الرياضيات؟
- 9- أعط مثلاً عن أهمية فلسفة الرياضيات في دراسة تاريخ الرياضيات, مع التبرير.
- 10- أعط مثلاً من تاريخ الرياضيات عن علاقة البعد الفلسفي بالبعد المنطقي, مع التبرير.
- 11- متى تبلورت مدارس فلسفة الرياضيات, وما علاقتها بتاريخ نظرية المجموعات؟
- 12- ما هي أزمة الرياضيات التي نشأت في نهاية القرن التاسع عشر الميلادي, وماذا كانت نتيجتها؟
- 13- أي من المدارس الفلسفية الرياضية تعتقد أنها أصح برأيك الشخصي, ولماذا؟
- 14- * أي من الحقول المعرفية تعتقد أن له التأثير الأكبر في دراسة تاريخ الرياضيات, مع التبرير؟
- 15- ما هي الجوانب الثلاثة المهمة في دراسة تاريخ العلوم, ومنها تاريخ الرياضيات؟ وأي الجوانب أكثر طغياناً؟ ولماذا؟ وما هو رأيك؟
- 16- * هل لدراسة تاريخ الرياضيات دور معرفي في الثقافة الإنسانية؟ ما هو؟
- 17- يقول أحدهم : " إن دراسة تاريخ الرياضيات هو أحد أبعاد دراسة الرياضيات ". ما هو رأيك بهذا القول؟ برر إجابتك.
- 18- هل تغير موقفك من الرياضيات قبل دراسة تاريخ الرياضيات وبعد دراسته؟ ولماذا؟
- 19- ما هو عيب الدراسة التقليدية لتاريخ الرياضيات برأيك الشخصي؟

- 20- ما هي علاقة نتائج نظرية غودل (مبرهنات اللاتمام) بدراسة تاريخ الرياضيات؟ أي هل كان لإحدى هذه النتائج، على المستوى الإنساني، أثر في تحديد مسار تاريخ الرياضيات؟
- 21- ما هو أهم ملامح الرياضيات الحديثة من وجهة نظرك؟ ولماذا؟
- 22- ما أثر تاريخ " البديهيات "، و " المصادر " على طبيعة الرياضيات الحديثة، وتطورها؟
- 23- هل " للنزعة الاقتصادية " علاقة بالرياضيات، وتطورها؟ أضرب مثلاً على ذلك.
- 24- ما هي " البنيوية " في الرياضيات؟
- 25- كيف تطور النظام الموضوعاتي في الرياضيات؟

قضايا في تاريخ الرياضيات للتفكير بها والبحث عنها من قبل الطلاب :

- 1- يقول جون ماكليش مؤلف كتاب " العدد " (عالم المعرفة - الكويت, الصفحة 11) : " ففي الرياضيات, غالباً ما قام نجوم مثل فيثاغورس وإقليدس بطرح مشكلات أكثر من تلك التي تمكنوا من حلها ". ما رأيك في هذا القول؟
- 2 - يقول الفيزيائي بول ديراك أحد كبار رواد ميكانيك الكم : " إن الأفكار التي اختارتها الرياضيات تكون الطبيعة قد اختارتها سلفاً ". ما هو رأيك في هذا القول؟ وماذا تستنتج من ذلك؟ هل يمكن أن تضرب أمثلة على القول؟
- 3 - يقول رولان أومنيس في كتابه " فلسفة الكوانتم " (عالم المعرفة- الكويت, الصفحة 86) وهو يتحدث عن أهمية رموز التدوين في الرياضيات. ثم يسأل : " هل هذا هو السبب الذي جعل الجبر من نواتج الحضارة العربية, التي ترفض أي أصنام وصور صريحة وأعطت الجبر اسمه؟ ". قارن ذلك بوجهة النظر المختلفة التي يقولها رشدي راشد في كتابه " رياضيات الخوارزمي.. تأسيس علم الجبر " (مركز دراسات الوحدة العربية - بيروت). ما هو السبب في اختلاف وجهات النظر هذه؟
- 4 - ما هي علاقة رياضيات الخوارزمي بثقافة عصره في القرن الثامن الميلادي, وخاصة مع علوم اللغة, وعلم الفرائض؟ انظر كتابه : " رياضيات الخوارزمي.. تأسيس الجبر ", الصفحة 61 - 80, وغيرها.
- 5 - يقول Rudy Rucker في كتابه " MindTools ", الصفحة 31-35, ما خلاصته أنه : " في الألف سنة الأخيرة نجد أن العصور الوسطى كانت عصر العدد, و عصر النهضة كان عصر الفضاء, وأن الثورة الصناعية كانت عصر المنطق, والعصر الحديث هو عصر اللانهاية, والآن ندخل عصر المعلومات (نظرية المعلومات التي أسسها كلود شانون Claude Shannon). ما هو رأيك؟ وماذا تستنتج؟
- 6 - ما هو الفرق بين الرقم والعدد؟ ومن ثم ما هو الفرق بين تاريخ الأرقام وتاريخ العدد؟
- 7- ما هي علاقة الألغاز, والأحجيات, بتطور الرياضيات؟ اضرب مثلاً على ذلك.
- 8- بالعودة إلى كتاب " الشفاهية والكتابية " (مؤلفه : والتر أونج, ترجمة : حسن البنا عزالنين, عالم المعرفة - الكويت, الصفحات : 44, 45, 115, وغيرها). ما هي علاقة ما يطرحه الكتاب بتطور الرياضيات, وتاريخها.

نظرية المجموعات.. إضاءة تاريخية

د. محمود باكير

لنمعن النظر في القول التالي الذي تتناوله بعض الأدبيات : " إن حلاق القرية يحلق لجميع رجال القرية الذين لا يحلقون لأنفسهم "، فنجد أنه ينطوي على تناقض (محيرة)، و لا نستطيع تبين صحة، أو خطأ، هذه العبارة. و ذلك لأنه إن كان هذا الحلاق لا يحلق لنفسه كأحد أفراد القرية، فإنه كحلاق للقرية سيحلق لنفسه، و هذا يناقض التصريح. و إن كان يحلق لنفسه كأحد أفراد القرية فهذا يناقض التصريح أيضاً لكونه يحلق للذين لا يحلقون لأنفسهم. و نخلص إلى أن القول يتضمن في طياته تناقضاً لا مفر منه. و قد طرح هذا التناقض في مطلع القرن العشرين (عام 1902م) الرياضي و المنطقي الإنكليزي برتراند رسل Bertrand Russell (1872-1970). و على الرغم من أن هذا التناقض قد ارتدى حلة جديدة، و كان لبواعثه ما يبررها، إلا أن نشأته تعود إلى فترة موهلة في القدم نسبياً. و تكمن أهميته في الفترة التي بعث بها أثناء ولادة " نظرية المجموعات " التي يعود الفضل فيها إلى الرياضي جورج كانتور G.Cantor (ينحدر أصله من الدانمارك، و ولد في روسيا، و قضى معظم حياته في ألمانيا، و عاش في الفترة (1845-1918)). و خاصة أن أفكار كانتور كانت تثير كثير من الجدل، و الانقسام الحاد بين معاصريه من الرياضيين.

فمنذ القدم، و تحديداً في القرن الرابع قبل الميلاد قال ابيوليدس - Eubulides : " إن البيان الذي أقوله الآن كاذب " . و بالتفكير في هذا التصريح نجد أنفسنا بمواجهة بيان لا يمكن الإتياء بصدقه، أو بكذبه، لما ينطوي عليه من تناقض. و ربما كان أقدم تناقض تم توارثه هو ما طرحه إبيمنيدس Epimenides (و هو فيلسوف من جزيرة كريت) حينما قال : " إن جميع الكريتيين دائماً يكذبون " . كذلك نجد، و بدون عناء، أن هذا التصريح يحمل في ثناياه تناقضاً لأن قائله كريتي.

و إذا ارتأينا أن تكون مادة هذا التناقض نظرية المجموعات فإننا نجد، و قبل الشروع في ذلك، أن بعض عناصر المجموعات هي مجموعات قائمة بنفسها. فهينة الأمم المتحدة مجموعة من الدول، و أعضاء هذه المنظمة (الدول) كل منها مجموعة من المواطنين. و من جهة أخرى هل من الممكن أن تكون هذه المجموعة - التي نتكلم عنها - عنصراً (عضواً) في نفسها؟ فالأمم المتحدة ليست كذلك، لأنها ليست دولة مستقلة في العالم، و كذلك مجموعة الرجال ليست برجل، و مجموعة المدرسين ليست بمدرس. و من ثم فإن هذه المجموعات لا تنتمي - كعنصر - إلى نفسها. بيد أن هناك مجموعات تحقق ذلك، فمجموعة كل الأفكار عبارة عن فكرة، لذا فهي تتضمن نفسها، و مجموعة كل المجموعات التي تخطر في البال من هذا النمط أيضاً، كذلك مجموعة كل المجموعات.

لنطلق على المجموعات التي لا تتضمن نفسها كعنصر فيها " بالمجموعات العادية " . و في خلاف ذلك نطلق عليها " مجموعات فوق عادية " . و لنرمز لمجموعة كل المجموعات العادية بالرمز N . و السؤال الآن : هل N نفسها مجموعة عادية، أو فوق عادية؟ لنفرض جدلاً (مؤقتاً) أن N فوق عادية، و من ثم فهي - وفق تعريف فوق العادية - تتضمن نفسها كعنصر فيها، أي أن N عنصر في المجموعة N . و لكن N - وفق تعريفها - هي مجموعة كل المجموعات العادية، لذلك فكل عنصر فيها مجموعة عادية؛ أي أن N مجموعة عادية، و هذا يناقض افتراضنا بأنها فوق عادية. لنفرض الآن العكس، أي أن N مجموعة عادية، و لكن N - وفق تعريفها - هي مجموعة كل المجموعات العادية، و بما أننا افترضناها عادية، فهي إذن يجب أن لا تنتمي لنفسها كعنصر. و من ثم فقد أضحت فوق عادية - وفق التعريف -، و هذا يناقض افتراضنا بأنها عادية.

و من الممكن صياغة هذا التناقض بلغة نظرية المجموعات, على نحو آخر, و ذلك باستخدام ما يسمى "خاصية رسل", أو "تناقض رسل", الذي يعبر عنه على النحو التالي: لتكن S المجموعة التي تتضمن مجموعة ما X إذا كانت المجموعة X لا تنتمي إلى نفسها, أي أن: $S = \{ X : X \notin X \}$. و يمكن إثبات أنه إذا افترضنا S هي عنصر من S, فإن هذا يؤدي إلى تناقض أيضاً. و مع اكتشاف "تناقض رسل" بدأ الحد من استخدام مفهوم "مجموعة كل المجموعات", لأن استخدامه كان يتم بعيداً عن الانضباط الرياضي الصارم. و من القضايا المحزنة أن الرياضي والمنطقي الألماني "فريج - G.Frege" كان قد أمضى سنوات طويلاً يحاول فيها إعادة بناء الرياضيات على أسس منطقية, و تمثل عمله في مجلدين استخدم فيهما مفهوم "مجموعة كل المجموعات". و عندما قارب الانتهاء من تأليف مجلده الثاني استلم رسالة من "رسل" عام 1903 يخبره فيها اكتشافه لهذا التناقض, مما حدا به إلى التوقف عن طباعة عمله هذا.

وبالتوقف هنيهة عند هذا التناقض لتشخيص الخلل, و معرفة مكنوناته, نجد أنه في كل مرة لدينا مجموعة, و عنصر منها, و نعرف هذا الأخير اعتماداً على المجموعة نفسها. و توصف مثل هذه التعاريف بأنها "غير توكيدية - Impredicative", و هي ذات طبيعة دائرية.

و توضيحاً لما عنيناه, ببساطة, لنرمز لمجموعة سكان القرية في عبارة "رسل", أنفة الذكر, بالرمز X و للحلاق بالرمز b, و من ثم نجد أن b قد عرّف (على نحو غير توكيدي) كالتالي: "هو العنصر في X الذي يخلق لكل عناصرها, و هؤلاء العناصر هم فقط من X الذين لا يخلقون لأنفسهم". و نلاحظ دائرية هذا التعريف عندما استعنا بعناصر المجموعة (سكان القرية) لتعريف الحلاق الذي هو عنصر من المجموعة نفسها. و يعتقد بأن أول من أشار إلى ذلك الرياضي و الفيلسوف الفرنسي هنري بوانكاريه Henri Poincare, و يشاطره في ذلك برتراند رسل حينما يقول: "لا يحق لأية مجموعة أن تتضمن عناصر لا يمكن تعريفها إلا بالاعتماد على المجموعة نفسها, أو تتضمن عناصر تستخدم, أو تفرض مسبقاً, هذه المجموعة".

و يعد هذا التناقض من أشهر التناقضات العديدة التي أثرت حول نظرية المجموعات في الفترة ما بين عامي 1895 و 1910. و قد ظن بعضهم في حينه أنها ليست أكثر من سراب ذهني, و لن تعدو أكثر من فقاعات رياضية تستعصي على الفهم. و قد ظن بعضهم بأن عملية "تجميلية" بسيطة, لبعض التعاريف الأساسية, كافية للتخلص من هذه العيوب المنطقية. بيد أن رسل, و بتعويمه لتناقضه, قد دق ناقوس الخطر, لأن تناقضه يدخل في صلب أساسيات نظرية المجموعات, و لم يعد من الممكن التغاضي عنه. و تلا ذلك اكتشاف بعض التناقضات الأخرى التي شكلت بمجموعها تحدياً أساسياً لصحة مفاهيم نظرية المجموعات, و تذر بنسف كيان هذه النظرية من جذورها.

وبدأ البحث يدور حول سبل النجاة من هذه الدوامة الرياضية - المنطقية منذ عام 1905, و طرح رهط من الرياضيين مراجعة أسس نظرية المجموعات, حيث تمركز الطرح حول "وجود المجموعة", و الصفات المشروعة التي تعرفها في حال وجودها, و كيفية نسج مجموعات جديدة من مجموعة قائمة. و الدوافع التي كانت تغذي هذه الطروحات هي أن المفهوم الحدسي للمجموعة, الذي جسده كانتور في تعريفه, لا يقدم أساساً كافياً لنظرية المجموعات. وهذا التعريف هو أن المجموعة: "تجميع لعدة أشياء متميزة تماماً محسوسة, أو مجردة".

و سرعان ما بدأت عدة محاولات للتخلص من هذه المتناقضات من سياق النظرية الوليدة, و ذلك بإهمال بعض المفاهيم, و التعاريف. بيد أنها ولدت جميعها ميتة. و كان لابد من حتمية التصدي, و مواجهة هذه التشوهات, و معالجتها, بعقلية علمية جريئة, و ذلك بالقيام بفتح علمي جديد.

وقد تبلور أسلوب المعالجة في ثلاث مدارس فكرية تعنى بفلسفة الرياضيات. وهذه تقتضي، على نحو أساسي، محاولة إعادة بناء المعارف الرياضية المبعثرة، و المتراكمة عبر العصور، بحيث تتبلور ضمن ترتيب معين، أو معنى محدد. وعلى الرغم من أن نشأة هذه المدارس تعود إلى ما قبل هذا التاريخ؛ بيد أن هذه "الأزمة" ساهمت في إنضاج هذه المدارس، وتأطيرها، وكانت القضية التي كبرت بها. و الإبحار في فلسفة هذه المدارس يتطلب رحلة خاصة إلى عالمها الواسع، بيد أن هذا لا يمنع، في هذه العجالة، من الإطلاقة السريعة لاستعراض معالمها الرئيسية.

أولى هذه المدارس تدعى المدرسة " المنطقية " Logistic ، التي روادها الفيلسوف والمنطقي الإنكليزي برتراند رسل، و الفيلسوف و الرياضي انكليزي وايتهد - A.N.Whitehead (1861-1947)، مع أن هناك محاولات سبقت بزوغ هذه المدرسة تجسدت في بعض أعمال الرياضي الألماني ديدكيند J.W.R. Dedekind (1831-1916)، و المنطقي الألماني فريج F.L.G.Frege (1848-1925) في الربع الأخير من القرن التاسع عشر الميلادي، وذلك أثناء سعيهم إلى رد بعض المفاهيم الرياضية إلى أخرى منطقية. و تتلخص فلسفتهم في أن الرياضيات رجولة المنطق، و أن المنطق شيا ب الرياضيات، و يجب صياغة كل المفاهيم الرياضية، و التعبير عنها، باستخدام المفاهيم المنطقية، و أن تطوّر النظريات الرياضية كنظريات في علم المنطق. و باختصار فإن هدفهم المنشود أن ترتدي الرياضيات عباءة المنطق.

و ثانيتهما المدرسة " الحدسية " Intuitionist ، و مؤسسها الرياضي الهولندي بروور Herman Weyl (1885-1955). مع أننا نجد بعض بذور أفكارها قبل ذلك عند الرياضي الألماني ليوبولد كرونكر Leopold Kronecker (1823-1891)، و الرياضي الفرنسي بوانكاريه. و يقول أنصار هذه المدرسة بأن نبع الرياضيات يكمن في البديهية التي تعمل على توضيح المفاهيم الرياضية، و أنه لا يمكن ترميز الرياضيات على نحو كامل، و أن التفكير الرياضي مستقل عن النخبة الخاصة التي استعملت للتعبير عنه. كما أن البيان الذي ينبىء بوجود كائن ما ذي خواص معينة، يعني أن هناك طريقة معروفة تمكّننا من إيجاد، أو إنشاء، هذا الكائن بواسطة عدد منته من الخطوات. و تحديداً تعرف هذه المدرسة بقدرة الإنسان على إنجاز سلسلة من الأعمال الذهنية ذات عدة مراحل، و بهذه الطريقة نحصل على ما تسميه " سلاسل أساسية "، و أشهرها سلاسل من الأعداد الطبيعية. و السمة المميزة لفلسفتهم تشرنقها، و اكتفاؤها الذاتي، حيث تنأى بنفسها عن المنطق، و الفلسفات الأخرى. و من المفيد الإشارة إلى أن الرياضي كرونكر كان يؤمن بأن الرياضيات منشأة أعمدها الأعداد الطبيعية، و المدركة على نحو حدسي. و قد حاول " تحسيب " (نسبة إلى الحساب) الرياضيات من خلال تطويع كائناتها باستخدام نظرية الأعداد.

و ثالث هذه المدارس هي المدرسة " الصورية " Formalist ، التي أفرزتها الموضوعات العشرون المتعلقة بالهندسة الإقليدية الذين أوجدتهم الرياضي الألماني ديفيد هيلبرت David Hilbert (1862-1943). و تنص وجهة نظرهم على أن الرياضيات تهتم بأنظمة شكلية مرمزة، و صيغ تستخدم هذه الرموز. و أن أساس الرياضيات لا يكمن في المنطق، بل تحديداً في مجموعة من الدراسات، و الرموز، و بمجموعة من العمليات تستخدم هذه الإشارات. و أن ما تنشده الرياضيات هو وجهة نظرهم - تهتم بالخواص البنيوية لأنظمة الرموز بعيداً عن معانيها. فالرياضيات - من عن أي معنى، أو مغزى، باستثناء عند ربطه بالرموز الأخرى.

هذا و لم يحل ذلك دون ظهور بعض الومضات الفلسفية الأخرى, من هنا و هناك, إلا أنها كانت انتقائية من الفلسفات الثلاث, و ربما توفيقية, بيد أنها لم تجد صدى لها. و حاولت كل مدرسة من هذه المدارس معالجة " أزمة " نظرية المجموعات ضمن إطارها الفلسفي الملتزمة فيه, و قد شرع ببناء عدة نظريات للمجموعات خالية من التناقض. و أبرز هذه المحاولات, و أكثرها قبولاً, كان إيجاد " نظرية مجموعات " مبنية على أسس موضوعاتية (تنطلق من جملة من الموضوعات الرياضية), و تنشأ استبعاد المتناقضات من كيان هذه النظرية. و أولى هذه الخطوات قام بها الرياضي الألماني إرنست زرميلو Ernst Zermelo (1871- 1956) عام 1908 عندما نشر بحثاً تضمن " نظاماً من الموضوعات " لأجل " نظرية المجموعات ". ثم أخضع هذا النظام للتعديل عدة مرات من قبل عديد من الرياضيين, كان آخرها في الأربعينيات من القرن العشرين. و هو المستخدم حالياً, لأن جل الرياضيين يعتقدون أن الطريقة الموضوعاتية في بناء نظرية المجموعات هي أفضل الطرق تلبية لمتطلبات الرياضيات الحديثة. و لأن اتساع مفهوم المجموعة المجدد في أنظمة زرميلو و فان نيومان John von Neumann (رياضي أمريكي, هنغاري الأصل (1903-1957)) يفي بكل أغراض الرياضيات. إلا أن إجراءاتهم قد لاقى بعض النقد لكونها تجسدت في تجنب هذه المتناقضات, و لم تقدم ضماناً بعدم مصادفة تناقضات من نوع آخر في المستقبل.

و في مطلع الثلاثينيات من القرن العشرين برهن الرياضي والمنطقي الأمريكي (النمساوي الأصل) كورت غودل Kurt Godel ما يسمى " نظرية اللاتمام ", التي نفت أية إمكانية لبرهان اتساق موضوعات زرميلو - فرانكل لنظرية المجموعات. و على الرغم من ذلك فإن معظم الرياضيين يؤمنوا بأنهم لن يواجهوا بتناقض آخر, و هذا ما توحى به هذه الموضوعات. و ما ساهم في تعميق هذا الإيمان, وترسيخه, هو ما أظهرته هذه النظرية من تماسك, و تلاحم, تحت مظرة الاستخدام إلى يومنا هذا.

و هناك نظريات أخرى للمجموعات منها ما يسمى " نظرية الأنماط " Type Theory لبرتراند رسل, و نظرية أخرى خاصة بالمدرسة الحدسية, إضافة إلى عديد من الأفكار التي كانت روافد لمعالجة الموضوع نفسه, و لم تنتظم ضمن التيارات الرئيسية الثلاث.

و على الرغم من أن ثمة حفنة من الرياضيين تنادي بخطورة استخدام نظرية المجموعات بردانها الحالي, بيد أن جل الرياضيين يتجاهلون مثل هذه التحذيرات, و خاصة أن هذه كانت أفضل الخيارات المتاحة.

الفكر المنطقي عند جورج بول..

إضاءة تاريخية

د. محمود باكير

المنطق في اللغة هو الكلام، وعند الفلاسفة - وفق الشريف الجرجاني (740-816 هجري) في كتابه "التعريفات" - "آلة قانونية تعصم مراعاتها الذهن من الخطأ في الفكر". وبعض الفلاسفة يعرفه على أنه فن التفكير، وكان يقول عنه أبو سليمان المنطقي السجستاني (المتوفي 380 هجري) "نحو عقلي". وهو ضرورة لكل العلوم، بل هو آلة العلوم. والمنطق مستقر في نفس كل ذي لب، كما يقول ابن حزم الأندلسي (384 هـ - 456) في كتابه "التقريب لحد المنطق".

و يقسم تاريخ المنطق عند بعضهم إلى ثلاث فترات: الفترة الكلاسيكية التي استمرت حوالي ألفي عام، وقد سيطر عليها فكر أرسطو (384-322 ق.م) واضع أصول المنطق الصوري. ثم الفترة الرمزية التي بدأت مع الرياضي والمنطقي الإنكليزي جورج بول George Boole، و انتهت بالرياضي الألماني ديفيد هيلبرت David Hilbert (1862-1943 م). ثم الفترة الحديثة (الفترة الرياضية) التي بدأت مع أعمال الرياضيين والمنطقيين الإنكليزيين برتراند رسل Bertrand Russel (1872-1970)، ووايتهد A.N. Whitehead (1861-1947 م)، و المستمرة حتى الآن. وبعضهم يعد هذه الفترة قد بدأت مع المنطقي النمساوي كورت غودل Kurt Godel (1906-1978 م). ومن ثم فإن المنطق الرياضي الحديث هو الصورة المتطورة عن المنطق الصوري كما ذكر رسل ووايتهد. و جورج بول هو صاحب مشروع تحويل التفكير المنطقي إلى نوع من أنواع الجبر. وكان هذا إيذاناً بولادة المنطق الرمزي، الذي يعد الحلقة الأساسية في تطور الفكر المنطقي في سياقه الرياضي. وكان جُل أمله من إعطاء المنطق هذا اللباس الجبري هو الصرامة والدقة، وهما هاجس كل رياضي.

حياته

ولد بول في مدينة لنكولن Lincoln في انكلترا عام 1815م لوالد كان يعمل إسكافياً، ويظن أنه كان له إلمام بسيط في الرياضيات. وقد تلقى بول تعليماً بسيطاً في إحدى مدارس مدينته. بيد أنه سرعان ما ترك المدرسة لينصرف إلى التعلم الذاتي. وقد أبدى في مستهل حياته اهتماماً بدراسة الأدب، ثم تعلم اللغات اللاتينية، واليونانية، والفرنسية، والألمانية، والإيطالية. وفي السادسة عشرة من عمره بدأ حياته العلمية معلماً في إحدى مدارس مدينة دونكستر Doncaster. و بعيد ذلك بدأ التحول الكبير في حياته حيث انصرف إلى دراسة الرياضيات على نحو جدي. و شرع بدراسة أعمال الرياضي لابلاس P.S. Laplace (1749-1827م)، و الرياضي لاغرانج J.L. Lagrange (1736-1813م). و خلال بضع سنوات بدأ يقدم الأبحاث الرياضية الأصيلة. وما انفك خلال تلك الفترة يرأس كبار الرياضيين المعاصرين. وقد استحوذ على اهتمامه بعض القضايا الخلافية في المنطق، والتي كان يشاطر بها صديقه الرياضي والمنطقي دي مورغان De .Morgan (1806-1871م). وكان قد طرح هذه القضايا على دي مورغان الفيلسوف الاسكتلندي

السير وليام هاملتون William Hamilton (1788-1856). و هذا غير الرياضي الايرلندي السير وليام روان هاملتون William Rowen Hamilton (1805 - 1865 م), فالأول كان بارونا, وورث اللقب عن أسرته, و الثاني كان رياضياً مرموقاً و حصل على اللقب بمأثره العلمية. ونتيجة لتلك الاهتمامات قام بول بنشر كتيب عام 1847 م بعنوان: " التحليل الرياضي للمنطق " The Mathematical Analysis of Logic الذي كان إرهاباً لكتابه الثاني ذائع الصيت الموسوم بـ " قوانين الفكر ", و اسمه الكامل " بحث في قوانين الفكر " An Investigation of Laws of Thought الذي أصدره عام 1854م. و اعترف دي مورغان بأن هذا العمل سيكون فاتحة عصر جديد في مسيرة العلم. و في عام 1849 انتخب لكرسي الرياضيات في كوين كولج (Queens College) في مدينة كورك Cork في جنوب ايرلندا (الجمهورية الايرلندية حالياً), و أمضى فيها بقية حياته.

وقد سعى في كتابه " قوانين الفكر " إلى تجبير المنطق, وذلك من خلال معالجته على نحو شبيه لما يجري في الجبر. وقد ذكر في بداية الكتاب أن الهدف من هذه الدراسة هو تحري القوانين الأساسية للعمليات العقلية التي يتم بها الاستدلال. و أن تصاغ بلغة الحساب الرمزية. و على هذه الأسس سيشاد علم المنطق, و تنجز طريقه. و يعد هذا الكتاب أحد المآثر العظيمة في تاريخ الرياضيات, لأنه كان الحجر الأساس في بناء المنطق الرمزي, و في بزوغ جبر جديد أصبح يدعى فيما بعد جبر بول Boolean algebra, وكذلك جبر المنطق Algebra of Logic. وفي الأربعين من عمره تزوج بول من ماري إيفرست Mary Everest من مقاطعة ولز في بريطانيا صاحبة عديد من الدراسات التربوية. و تشغل أعمالها الكاملة أربعة مجلدات. حيث تطرقت في بداية هذه الأعمال إلى بعض مذكرات زوجها. فقد ذكرت أنه استغرق سبع سنوات في إنجاز كتابه " قوانين الفكر ", و قد تمنى لو أنه مكث خمس عشرة سنة في ذلك.

و في أواخر شهر تشرين الثاني (نوفمبر) عام 1864م توجه من منزله إلى كليته سيراً على الأقدام (و التي تبعد حوالي ثلاثة كيلو مترات) في جو ماطر و عاصف. و ألقى محاضرتة بثيابه المبللة. فادى ذلك إلى إصابته بتهابات حادة. كما كان يعاني أصلاً من وهن شديد نتيجة انغماسه بعمله حيث كان دووباً, و مثابراً. و قد أدى ذلك إلى وفاته قبل أن يبلغ الخمسين من عمره.

بول و أدوات الربط المنطقية

إن معظم مناهج الرياضيات المعاصرة في الجامعات, و في المرحلة الثانوية, تتضمن مقدمة عن المنطق, حيث يعرض فيها " حساب القضايا " Propositional Calculus. و هو يدرس أدوات الربط المنطقية (و , أو, النفي, إذا كان... فإن, إذا. و فقط إذا كان) و التي يطلق عليها أيضاً (الوصل, الفصل, النفي, الاقتضاء, التكافؤ أو ثنائي الاقتضاء). وقد اتضحت هذه الأدوات, و تبلورت, بل و شاع استخدامها على نطاق واسع, منذ عمل بول و غيره من مناطق النصف الثاني من القرن التاسع عشر الميلادي. فقد أحكم بول السيطرة على ثلاث أدوات منطقية (من أصل خمس), و هي (و, أو, النفي).

و مما لاحظته بول أن حرف العطف (و) يشاطر عملية الجمع المألوفة (+) بعض خصائصها الصورية (الشكلية). فمن ذلك أن كليهما مستقلتان عن طبيعة الحدود التي يربط بينهما. فمثلاً عبارة " الفرنسيون و الألمان " هي عين عبارة " الألمان و الفرنسيون ". و كذلك الأمر نفسه في الجبر, حيث أن $x + y = y + x$ من أجل أي عددين x, y . وهذا ما يطلق عليه بأن الجمع تبديلي, أو أنه يتصف بالخاصة التبديلية.

و بذلك يكون بول قد وضع من خلال تلك الأدوات الأساس النظري لتحويل العمليات الحسابية (الجمع, الضرب,...), و العمليات المنطقية (كمقارنة عددين ...) التي تطبق على الأعداد, إلى دارات كهربائية تستخدم في الحواسيب. لذلك فإن ثمة من يقول بأن بول واهب الحاسوب (الكمبيوتر) ملكة " العقل " .

الترميز عند بول

من المعروف أن المنطق عموماً كان يستخدم نوعاً من الرمزية, غير المحكمة, بل و ليست دقيقة. بيد أن بول أول من قام بمحاولة ترميز المنطق على نحو منهجي, و منظم, وفقاً لقواعد صارمة. فقد استخدم رموزاً مستقاة من الجبر للتعبير عن العمليات الفكرية. و تمخض عن ذلك منطق جديد. و بعضهم يعد أن ما قام به بول هو إيجاد جبر جديد يختلف عن الجبر العادي المألوف. فقد استخدم أحرفاً من الأبجدية (A, B, C,...) للدلالة على أي موضوع نحن بصدد دراسته, و أكثر دقة للدلالة على مجموعة جزئية من مجموعة من الأشياء (أعداد, نقاط, أفكار, أو أية كائنات أخرى مأخوذة من " مجموعة كلية "). و رمز للمجموعة الكلية بالرمز " 1 ", أي بالعدد واحد. و بعضهم يطلق عليها المجموعة الشاملة, أو الصف الكلي Universal Class. و افترض بول وجود مجموعة خالية, أو الصف الفارغ Null Class (و هي مجموعة لا تحوي أي عنصر من المجموعة الكلية), و رمز لها بالرمز " 0 ", أي الصفر. و قد انطلق بول, في ذلك, من مفهوم مفاده أن الواحد هو كل شيء. و أن الصفر لا شيء. فمثلاً, إذا نظرنا إلى الأوربيين على أنهم المجموعة الكلية (المجموعة التي قيد الدراسة), فإننا نرمز لها بالرمز 1. و لنفرض أن X ترمز للأوربيين الفرنسيين, و أن Y ترمز للأوربيين الرجال الذين يزيد عمرهم عن خمسين عاماً, و أن Z ترمز للأوربيين الذين يزيد طولهم عن 180 سم. و استخدم بول الإشارة " + " بين حرفين, كما في $X + Y$ للدلالة على اجتماع (اتحاد) المجموعتين الجزئيتين X, Y. و هي تعني عند بول, المجموعة المتشكلة من اجتماع عناصر X مع عناصر Y, على أن تستثنى العناصر المشتركة بينهما. و أصبح يطلق على هذه العملية الآن في الأدبيات الرياضية " الفرق التناظري " بين المجموعتين X, Y, و يرمز لها بالرمز $X \Delta Y$. ولكن ثمة من يطلق عليها الجمع البولياني Boolean Sum. بينما استخدم دي مورغان مفهوماً للاجتماع يلزم بأخذ العناصر المشتركة بين المجموعتين. و جبر بول الحديث, المتداول حالياً يأخذ الإشارة " + " لتعني مفهوماً للاجتماع كما عرفه دي مورغان.

كما استخدم بول إشارة الضرب " x " بين مجموعتين للدلالة على تقاطع هاتين المجموعتين, حيث نكتب $X \times Y$, كما تكتب أيضاً على النحو (X.Y), أو (YX). وهي - تعريفاً - مجموعة العناصر المشتركة بينهما. و تسمى هذه العملية أحياناً بالضرب المنطقي. و في المثال المذكور آنفاً إن $Y \times X$ تمثل مجموعة الفرنسيين الرجال الذين يزيد عمرهم عن خمسين عاماً. و قد عبّر عن الهوية بعلامة التساوي (=), حيث استخدم هذه الإشارة للدلالة على علاقة التطابق بين مجموعتين جزئيتين, للدلالة على أن لهما العناصر ذاتها.

تعريف الحلقة RING

إن أفضل السبل لدراسة منطق بول الرمزي هو باستخدام إحدى البنى الأساسية في الجبر المجرد (الجبر الحديث), وهي " الحلقة " . و مفهوم الحلقة متضمن في بعض أعمال رياضيي القرن التاسع عشر الميلادي.

بيد أنه لم يعترف عليه كمفهوم رياضي ذي كيان مبلور إلا في القرن العشرين. و البنية الجبرية – ببساطة – هي مجموعة معرف عليها عملية رياضية، أو أكثر، و تحقق شروطاً معينة.

لنأخذ مجموعة الأعداد الصحيحة (الموجبة و السالبة)، التي يصادفها الدارس في بداية الجبر العادي، (..... , 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,) و لنفرض أن X و Y ترمزان لأي عددين صحيحين، بما في ذلك احتمال تساويهما. إن $Y + X$ يمثل حاصل جمعهما، و $Y \times X$ يمثل حاصل جداولهما (على النحو المألوف). إن الكائن الناتج عن هاتين العمليتين (الجمع و الضرب) ينتمي إلى المجموعة ذاتها، لأن حاصل جمع عددين صحيحين هو عدد صحيح، و حاصل جداء عددين صحيحين هو عدد صحيح. لذلك يقال إن مجموعة الأعداد الصحيحة " مغلقة " بالنسبة للجمع، و الضرب. و هاتان العمليتان تحققان القواعد التالية ضمن هذا الإطار :

$$X + Y = Y + X \text{ (الخاصة التبديلية بالنسبة للجمع)}$$

$$(Z + Y) + X = Z + (Y + X) \text{ (الخاصة التجميعية بالنسبة للجمع)}$$

$$(Z \times Y) \times X = Z \times (Y \times X) \text{ (الخاصة التجميعية بالنسبة للضرب)}$$

$$(Z \times Y) + (Z \times X) = Z \times (Y + X) \text{ (توزيع الضرب على الجمع من اليسار)}$$

$$(Y \times Z) + (X \times Z) = (Y + X) \times Z \text{ (توزيع الضرب على الجمع من اليمين)}$$

و من أجل أي عددين Y و Z فإن ثمة عدداً X في هذه المجموعة بحيث أن $Z = Y + X$ ، وهو ما يمكن أن نطلق عليه " قانون الطرح ". و هذا القانون لا يشير إلى وحدانية العدد X ، ولكن يمكن البرهان على ذلك انطلاقاً منه، ومن غيره من القوانين التي تتعلق بالجمع. و نشير عادة إلى العدد X بالرمز $Z - Y$.

و الآن إذا كان لدينا مجموعة من الأشياء، و كانت المجموعة مغلقة بالنسبة لعمليتين افتراضيتين يمكن أن يرمز لهما " + " و " x "، و كانتا تحققان القوانين المذكورة آنفاً، فإتينا نسمي هذه المنظومة (المجموعة مع العمليتين) " حلقة ". و نسمي هاتين العمليتين " بالجمع "، و " الضرب "، بالترتيب، وذلك لتشابههما بالصورة مع عمليتي الجمع و الضرب في الحساب.

و مجموعة الأعداد الصحيحة (مع عمليتي الجمع و الضرب المألوفتين) تعد أوضح مثال عن الحلقة، كذلك مجموعة الأعداد العادية (الكسرية). كما أن ثمة أمثلة أخرى عديدة. ومن الشائع أن نكتب $Y \times X$ على النحو $Y X$ ، لذلك فإن $X \times X$ تكتب X^2 (و نقرأ : X مربع، أو X مرفوعة للقوة اثنين). و إذا تحقق في حلقة ما أن $X = X^2$ من أجل أي X (خاصة اللانمو)، إضافة إلى أن فيها عنصراً حيداً (بالنسبة لعملية الضرب)، أي أن ثمة عنصراً " 1 " بحيث أن $X = 1 \times X = X \times 1$ ، من أجل كل X ، فإتينا نسمي حلقة بوليانية Boolean Ring. وهذه الأخيرة بالضرورة تبديلية.

ومن الممكن الحصول على حلقة بوليانية بأخذ جميع المجموعات الجزئية لمجموعة ما؛ أي بتشكيل مجموعة عناصرها عبارة عن مجموعات جزئية (أجزاء) من مجموعة ما معطاة. و يمكن التعبير – في هذه الحلقة – عن قولنا إن X مجموعة جزئية من Y (أو X محتواة في Y) بكتابة المعادلة $Y X = X$. و يمكن توضيح ذلك إذا عرفنا أن $Y X$ في هذا السياق تمثل تقاطع المجموعتين Y و X (أي مجموعة العناصر المشتركة بينهما). و من ثم فإن X محتواة في Y إذا كان حاصل تقاطعهما هو عين X . وهذا يعبر عنه بالرموز الحديثة المتداولة حالياً في نظرية المجموعات، على النحو : $X \subseteq Y$ يكافئ $X = Y \cap X$.

ومن الجدير بالذكر أن $X = X^2$ صحيحة في الجبر العادي – حصراً – عندما تكون قيمة X تساوي الصفر، أو الواحد. بينما هذه المعادلة محققة دوماً في أية حلقة بوليانية كونها شرطاً لوجود الحلقة.

و هذه إحدى أوجه الخلاف بين الحلقة البوليانية و جبر المنطق من جهة أولى، و الجبر العادي من جهة ثانية، لأن ثمة خلافات أخرى. فمثلاً إذا كان $YX = ZX$ (حيث أن X ليست المجموعة الخالية) فإن هذا لا يقتضي أن $Y = Z$ ، و هذا خلاف الجبر العادي الذي نستطيع فيه اختزال X من الطرفين طالما أنها لا تساوي انصفر.

و من المعروف في الجبر العادي أنه إذا كان حاصل جداء عددين يساوي الصفر فإنه لابد أن يكون أحدهما على الأقل يساوي الصفر. و هذا غير صحيح في جبر المنطق. و توضيحاً لذلك لنفرض لدينا مجموعتان X و Y بحيث أن $0 = YX$ (أي أن تقاطعهما خال، لأن الصفر عند بول يمثل المجموعة الخالية)، و من ثم لا يوجد أي عنصر مشترك بينهما مع أن كلًا من المجموعتين ليست خالية.

و قد كان بول يعد نفي X هو $1 - X$ (الواحد مطروحاً منه X). و لتوضيح ذلك لنفرض أننا في حلقة بوليانية، و أن X مجموعة جزئية من مجموعة كلية ما، لذلك فإن $X = X^2$. و هذه تكتب على النحو: $X(1 - X) = 0$ (كما في الجبر العادي). هي تعني أن تقاطع X مع $(1 - X)$ يساوي المجموعة الخالية. و هذا يقترح أن نسمي $(1 - X)$ متممة المجموعة الجزئية X .

بول و القوانين الأساسية للفكر

من المعروف أن القوانين الأساسية للفكر ثلاثة :

- 1- قانون الهوية (الذاتية) (The Law of Identity) الذي ينص على أن : " p هي p "، أو " القضية p تكون p ".
- 2- قانون عدم التناقض (The Law of Non-Contradiction) الذي ينص على أنه : " لا يمكن أن تكون القضية p و نفي p في آن واحد " . أي إذا أثبتنا قضية ما لا يمكننا أن ننفيها في الوقت نفسه. و بعضهم يطلق على هذا القانون " مبدأ لا يبرز في عدم التناقض ".
- 3- قانون الثالث المرفوع (The Law of excluded middle) و نصه : " القضية إما p أو نفي p ، و لا وسط بين ذلك " . أي " ليس ثمة وسط (ثالث) بين p و نفي p " . وهو يعني أن النقيضين لا يمكن أن يكونا صحيحين معاً، أو خاطئين معاً، بل لا بد من أن أحدهما صحيح، و الآخر خاطئ. و إذا تبيننا طريقة بول في نظرتة إلى الأشياء فإن العديد من المبادئ الميتافيزيقية قد أضحت حقائق جبرية. لنر كيف استنتج بول " قانون عدم التناقض " بطريقة جبرية انطلاقاً من عبارة بسيطة. فقد نبني بول الفرضية $X = X^2$ كقانون أساسي للفكر. ثم تابع مناقشاته على نحو جبري، حيث استنتج من الفرضية السابقة : $0 = X - X^2$. و من ثم : $X(1 - X) = 0$. و الحد الأول من الطرف الأيمن هو القضية X ، و الحد الثاني هو $(1 - X)$ ، و هذا نفي X كما ذكرنا آنفاً. و الطرف الأيسر (الصفر) يرمز إلى المجموعة الخالية (لا شيء). و من ثم أصبحت العبارة تعني أنه لا وجود لشيء مشترك بين القضية، و نفيها. أي أن " X و نفي X " غير صحيح. و هذا هو عين قانون عدم التناقض. كما يمكن التعبير عن قانون الثالث المرفوع بالعبارة الجبرية $X + (1 - X) = 1$. أي أن أي عنصر إما أن ينتمي إلى المجموعة X ، أو ينتمي إلى متممتها.

بول و القياس

من المعروف أن القياس هو أكمل أنواع الاستنتاج الصوري من وجهة نظر المنطق الصوري. و القياس انتقل من قضيتين تلزم عنهما قضية أخرى تسمى نتيجة. ومن أشهر أمثلة القياس :

كل رجل فان " مقدمة كبرى "

سقراط رجل " مقدمة صغرى "

سقراط فان " نتيجة "

فإذا صدقت المقدمتان صدقت النتيجة بالضرورة في المنطق الصوري. و الآن سنحاول الوصول إلى هذه النتيجة انطلاقاً من المقدمتين باستخدام بعض الطرق الجبرية. لذلك سنفرض أننا اخترنا المجموعة الكلية بحيث تتضمن " مجموعة كل الفانين ", و " مجموعة كل الرجال ", و مجموعة وحيدة العنصر تتألف من سقراط. و نرمز لهذه المجموعات على التوالي بالرموز X, Y, Z . و من ثم فإنه يمكن التعبير عن القضية الأولى " كل الرجال فانون ". بالمعادلة التالية : $Y \subseteq X$. و هذا لا يفترض صحة هذه القضية، بل تنص المعادلة على أنه إذا أردنا تأكيد صحتها فإنه يعبر عنها بهذه الطريقة. و بالمثل فإنه يمكن التعبير عن القضية الثانية " سقراط رجل " بالمعادلة التالية : $Z \subseteq Y$. و بتعويض قيمة Y من المعادلة الأولى في المعادلة الثانية نحصل على : $Z \subseteq X$. و بضرب طرفي هذه المعادلة بالمقدار X نجد : $Z \cap X = X$. (كل الخطوات التي قمنا بها حتى الآن منسجمة تماماً مع قواعد الجبر العادي). و بالاستفادة من أن $X^2 = X$ تصبح المعادلة الأخيرة $Z \cap X = X$. و لكن $Z \cap X = X$. إذن $Z \subseteq X$. و هذه تعني أن " سقراط فان ". لنوضح هذه الفكرة بطريقة أكثر بساطة. لذلك نفرض ثلاث مجموعات X, Y, Z بحيث أن X محتواة في Y , و أن Y محتواة في Z . فإتينا نستنتج في المنطق الصوري أن X محتواة في Z . بينما يمكن البرهان على صحة هذه النتيجة في المنطق الحديث.

من أجل ذلك لنعرف عملية التقاطع على النحو التالي : نقول إن X محتواة في Y يكافئ (منطقياً) أن تقاطعهما يساوي X . و نعني بالتكافؤ أن تحقق الأولى يقتضي الثانية، و تحقق الثانية يقتضي الأولى. و نعبر عن ذلك رمزياً $X \subseteq Y \leftrightarrow X = Y \cap X$. كذلك فإن $Z \supseteq Y \leftrightarrow Y = Z \cap Y$. و بتعويض قيمة Y من المساواة الثانية في المساواة الأولى نجد :

$Z \cap Y \cap X = X$. و لكن $Z \cap X = Z \cap (Y \cap X) = Z \cap Y \cap X$ (و ذلك بالاستفادة من المساواة الأولى). إذن $Z \cap X = X$. و هذا يكافئ أن X محتواة في Z .

و هذا التوضيح يعطي فكرة عن الطريقة التي استخدمها بول في معالجة قضايا المنطق بأسلوب جبري. لذلك يقال إن بول حينما وضع هذا الحساب المنطقي لم يدع أن ماهية المنطق جبرية، و إنما أراد فقط أن يؤكد على أنه " إذا أمكن التعبير عن العمليات الجبرية و المنطقية برمز واحد فإن تعبيراتهما الرمزية تخضع لقوانين واحدة ". و مما أكده بول أيضاً في عمله أنه يجب ربط المنطق بالرياضيات، و ليس بالميتافيزيقا كما كان يجادل الفيلسوف وليام هاملتون.

الفلاسفة و المنطق

على الرغم من أن ما قدمه بول في دراسته للمنطق كان من دون ريب نقطة انعطاف في تطور المنطق، إلا أنه من الملاحظ أن اهتمام الفلاسفة به كان أقل بكثير من اهتمام الرياضيين. فعلى الرغم من أن بول نشر كتابه الأول في المنطق عام 1847م، إضافة إلى كتاب آخر أصدره دي مورغان على نحو مستقل هو " المنطق الصوري " Formal Logic، و الذين كانا فتحاً علمياً جديداً، بيد أن اهتمام الفلاسفة بالمنطق على

نحو جدي لم يبدأ حتى مطلع القرن العشرين. ومما سارع في هذا الاهتمام، خصوصاً في انكلترا، هو ظهور كتاب برتراند رسل "أسس الرياضيات" Principles of Mathematics عام 1903م، ثم ظهور كتابه "أصول الرياضيات" Principia mathematica (3 أجزاء) الذي صدر في الفترة 1910-1913م، وشاركه في تأليفه ألفريد نورث وايتهيد Alfred North Whitehead. وهذا الكتاب قام بدور كبير في نمو المنطق الرياضي. لأنه من المعروف أن الفلسفة الغربية الحديثة (المتداة من عام 1600م إلى عام 1900م) قد أهملت المنطق الصوري إهمالاً كبيراً، بل وقامت بنبذه. فقد كان الفيلسوف الألماني لايبنتز Leibniz (1646-1716م) الفيلسوف الوحيد بين الفلاسفة الكبار في أوروبا الذي كان فيلسوفاً، و منطقياً. أما الفلاسفة الآخرون فكانوا يجهلون أسس المنطق الصوري نفسه، ومن هؤلاء فلاسفة كبار مثل الفيلسوف الألماني كانت Kant، و الفيلسوف والرياضي الفرنسي رينيه ديكارت (1596-1650). وهذا الأخير كان عدواً لادواً للمنطق الصوري.

لذلك خصص لجورج بول حوالي صفحة في الموسوعة الفلسفية (Encyclopedia of Philosophy) (الصادرة عام 1967م) من أصل ثمانية مجلدات، في حين خصص له بلان (E.T.Bell) فصلاً كاملاً من أصل تسع وعشرين فصلاً في كتابه "رجال الرياضيات" Men of Mathematics (الصادر عام 1937).

و في الختام لا بد من الإشارة إلى أن بول بعد واحداً من أبرز علماء الرياضيات الذين عملوا في مجال الرياضيات البحثية في القرن التاسع عشر الميلادي. وقد استفاد من فكره الرياضي في أبحاثه في المنطق. و قد ذهب رسل في مقال له نشر في مطلع القرن العشرين إلى أن: "الرياضيات البحثية قد اكتشفت من قبل جورج بول في عمله المعروف "قوانين الفكر". وقد أسىء فهم هذا القول في بعض الأوساط، فضلاً عن أنه يبغض كثير من الرياضيين حقوقهم، و مكانتهم. وهذا ما حدا برسول إلى أن يبعث رسالة في عام 1954م إلى الأكاديمية الملكية الأيرلندية، التي كانت تحتفل عندها بذكرى مرور قرن على إصدار بول لكتابه "قوانين الفكر" يقول فيها: "إن التعليق الذي اقتبستموه مني وهو: "أن الرياضيات البحثية قد اكتشفت من قبل بول،" يجب أن لا يؤخذ بمعناه الحرفي، و لكن كتعبير أريد منه الإشارة إلى أهمية الموضوع الذي أنجزه بول".

و لا بد من الإشارة إلى أن مآثر بول المنطقية تستخدم في هذه الأيام على نطاق واسع في مجال الرياضيات البحثية، و في معالجة مشاكل التأمين، و في نظرية الشبكات Information Theory، و في مجالات أخرى عديدة، فضلاً عن أنه، كما قلنا، يعده بعضهم واهب الحاسوب ملكة "الحقل".

مراجع البحث:

- A History of Mathematics, C. Boyer
- Fundamentals of Mathematics, M. Richardson
- Mind Tools, R. Rucker
- Topics in Algebra, I. N. Herstein

- المنطق و فلسفة العلوم، بول موى، ترجمة: د. فؤاد حسن زكريا.
- الفلسفة المعاصرة في أوروبا، إ. م. بوشنسكي، ترجمة: د. عزت قرني.

اللانهاية... إضاءة تاريخية

د. محمود باكير

اهتم الإنسان منذ القدم " باللامتناهي " لأسباب عديدة، قد يكون من أبرزها هو شعوره بضعفه الإنساني، لعدم قدرته على فهم سنوك الأعداد غير المنتهية، وإخفاقه في " بلوغها " لذلك شكّل هذا المفهوم تحدياً عقلياً كبيراً له. لهذا وضع أفلاطون (427 ق.م - 347 ق.م) القضية التالية: " لا يوجد نهاية للأعداد الطبيعية "، أي لا يمكن الانتهاء من عدّها. وعلى الرغم من أن هذه حقيقة علمية، لا سبيل إلى إنكارها، بيد أنها تنم عن إقرار بنوع من العجز الإنساني. وربما هذا ما دفع الإنسان القديم إلى أن يضعها في مصاف " الغيبيات ". بيد أن اهتمام الرياضيين بها بدأ منذ عهد الرياضي الإغريقي زنون Zenon (عاش في القرن الخامس قبل الميلاد). ومنذ ذلك الحين و التفكير مستمر لتوضيح مفهوم " اللانهاية " على صعيد الرياضيات أولاً، ثم على صعيد علم اللاهوت فيما بعد. أو بمعنى آخر، مفهوم المنتهي، و غير المنتهي. لأنه على الرغم من أننا نعيش في عالم منته، بيد أن الرياضيات التي نحتاجها للتعامل معه بحاجة ماسة إلى اللانهاية. فمجموعة الأعداد الطبيعية غير منتهية، و عدد نقاط قطعة مستقيمة - مهما صغرت - غير منتهية. و لكي نحدد قيمة π بدقة يعوزنا عدد لا نهائي من الأعداد بعد الفاصلة، و الأمثلة على ذلك أكثر من أن تحصى، و ربما كان عددها لا نهائياً أيضاً!

يساوي ضعف محيط الصغرى. و لنرسم القطر cb من مركز الدائرة c . و لتكن a نقطة تقاطعه مع الدائرة الصغرى، و من ثم يكون ca و cb نصفي قطري الدائرتين الكبرى و الصغرى بالترتيب. لنقرن النقطة a من الدائرة الصغرى مع b من الدائرة الكبرى، ثم لنقرن بين كل نقطة من الدائرة الصغرى مع نظيرتها في الكبرى، و ذلك يرسم أنصاف أقطار متعددة كالسابق. و على الرغم من أن محيط الدائرة الكبرى ضعف محيط الصغرى فرضاً، إلا أننا استطعنا أن نربط بين كل نقطة من الصغرى مع نقطة من الكبرى، و العكس صحيح أيضاً. لذلك يقول بعضهم بأن " عدد " نقاط محيط الكبرى هو نفس " عدد " نقاط محيط الصغرى (بغض النظر عن ماهية هذا العدد).

و لتوضيح الفكرة أكثر لناخذ مجموعة الأعداد الطبيعية، و لنربط كل عدد بضعف. وهو تقابل واحد إلى واحد بين مجموعة الأعداد الطبيعية و مجموعة الأعداد الزوجية. و تقابل واحد إلى واحد يعني قاعدة للربط بين مجموعتين بحيث يكون كل عنصر من الأولى يقابله عنصر واحد فقط من

و هذا المفهوم قد يختلط أحياناً على بعضهم، فيظن - مثلاً - أن مجموع عدد حبات الرمل في جميع شواطئ العالم عدد غير منته. فهو ليس كذلك طالما نستطيع عدّ الحبات، بغض النظر عن الزمن اللازم لذلك. في حين تكون المجموعة 1, 2, 3, 4, 5, ... غير منتهية، لأنه مهما توغلنا في هذه الأعداد فإن ثمة أعداداً أكبر. و قد تجنّب بعضهم استخدام مفهوم اللانهاية، غير أن الرياضيات التي تولدت عن ذلك كانت غير مجدية، و نطاقها ضيق جداً. و قد بقي هذا المفهوم يستعصي على الفلاسفة، و الرياضيين، رداً من الزمن، إذ كانت كل المحاولات لبلورة نظرية شاملة، و دقيقة، تتعلق به تصطدم ببعض المتناقضات (المحيررات) التي لا سبيل لتفاديها. لذلك لم تكن هذه الكلمة " المبهمة " تعني لمعظم الناس أكثر من شيء ضخم جداً، أو غير محدود، لا يمكن الإحاطة به.

و للتعرف على ضبابية هذا المفهوم و التناقض الذي كان ينطوي عليه، لناخذ دائرتين لهما المركز نفسه، بحيث يكون محيط الكبرى

و في عام 1872 م نشر الرياضي الألماني ديد كند Dedekind (1831-1916) بحثاً عرف فيه المجموعة غير المنتهية. و ينص تعريفه على أنه : نقول عن " نظام " إنه غير منته إذا كان يكافئ جزءاً فعلياً من نفسه, و في خلاف ذلك نقول إن النظام منته. و هذا التعريف يصاغ حالياً بلغة نظرية المجموعات على النحو التالي : تكون المجموعة غير منتهية إذا كان هناك تقابل واحد إلى واحد بينها و مجموعة جزئية تماماً منها.

و بعد ذلك بعام واحد اكتشف الرياضي جورج كانتور Cantor (1845-1918) (ينحدر أصله من الدانمارك, وولد في روسيا, و قضى معظم حياته في ألمانيا) أنه يوجد تقابل واحد إلى واحد بين مجموعة الأعداد الطبيعية و مجموعة الأعداد العادية (الكسرية) الموجبة, على الرغم من أنه بين أي عددين طبيعيين متتاليين يوجد عدد لا نهائي من الكسور. و عتبر عن ذلك بقوله (مبرهنة) : " إن مجموعة الأعداد العادية الموجبة قابلة للعد "؛ بمعنى أنه, ببساطة, يوجد أعداد طبيعية بقدر ما يوجد أعداد عادية موجبة. و هذا يشير إلى أن مجموعة الأعداد الزوجية قابلة للعد أيضاً.

و في عام 1874 م نشر كانتور أكثر أبحاثه ثورية في الدورية العلمية Crelle's Journal, حيث بين أنه ليس فقط عدد الأعداد المنتهية (الطبيعية) غير منته, بل أيضاً بالمقابل فإن عدد الأعداد غير المنتهية هو غير منته. و هو بذلك أول من لاحظ تباين درجات اللانهاية, و اختلافها. و النتيجة المثيرة للدهشة في أعمال كانتور أن " البعد " ليس له علاقة بعدد عناصر المجموعة (والأصح رياضياً: أن البعد ليس له علاقة مع " قدرة مجموعة "), حيث إن " عدد " نقاط قطعة مستقيمة طولها واحدة الأطوال هو نفس " عدد " نقاط مربع مساحته واحدة المساحات, و هو نفس " عدد " نقاط مكعب حجمه واحدة الحجم. و الأكثر من ذلك, فإن هذا " العدد " هو نفس " عدد " نقاط الفراغ الثلاثي بأكمله.

و قد لقي كانتور معارضة شديدة من بعض معاصريه من الرياضيين, و الفلاسفة, و أخفق في إقناعهم بصلاحيته نتائجه. فقد كان بعضهم يطرح

الثانية, و العكس صحيح أيضاً. و على الرغم من أن الحدس يشير إلى أن المجموعة الأولى " ضعف " الثانية, إلا أننا نجد أن المجموعتين " متساويتان " في نهاية المطاف, بغض النظر عن طبيعة " التساوي " هذا. و التقابل :

....., 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1
 ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
 ,12 ,10 , 8 , 6 , 4 , 2

وما خلاص إليه مفكرو العصور الوسطى, أمثال القديس توماس الأكويني St.T.Aquinas, حينما صادفوا مثل هذه الظواهر, أن الأعداد غير المنتهية تحمل في طبيعتها التناقض, و ذلك لعجزهم عن تفسير سلوكها. و أما غاليلو Galileo فقد ضمن كتابه " الحوارات " (المنشور في هولندا عام 1638 م) حواراً بين ثلاثة أشخاص من عصر النهضة, حيث قابل أحدهم كل عدد بمربعه, ثم تساءلوا فيما إذا كانت المجموعة الثانية أصغر من الأولى؟

..... , 5 , 4 , 3 , 2 , 1
 ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
 ,25 ,16 , 9 , 4 , 1

و ما خلاص إليه غاليلو هو : أن كلاً من هاتين المجموعتين غير منتهية, و لا نستطيع استخدام علاقة التساوي, أو نفيها, في حالة المجموعات غير المنتهية, و إنما يقتصر استعمالها على المجموعات المنتهية فقط.

و السؤال الآن : لماذا نحتاج إلى الأعداد غير المنتهية؟ والجواب - ببساطة - نحتاجها للسبب نفسه الذي نحتاج فيه الأعداد المنتهية (الأعداد الطبيعية), لأن هذه الأخيرة تمكننا من معرفة عدد عناصر مجموعة منتهية. لأن الأعداد الطبيعية عبارة عن تجريد للمجموعات المنتهية (إن كانت مجموعات رياضية أو غير ذلك). فمثلاً العدد خمسة هو ما تشترك به كل المجموعات المؤلفة من خمسة عناصر. في حين نحتاج لمعرفة عدد عناصر مجموعة غير منتهية إلى أعداد غير منتهية.

الأعداد. و لم يكن كرونكر حجر عثرة في دخول كانتور جامعة برلين فحسب، بل هاجمه مراراً، و حاول أن يقوّض فرع الرياضيات الذي عمل كانتور جاهداً على تأسيسه. و نتيجة لتفاعل الظروف الموضوعية التي أحاطت بكانتور مع ظروفه الذاتية التي تميزت بشخصية حساسة و مرهقة، قاده ذلك إلى انهيار عصبي في عام 1885م. و ما لبثت نوبات الكآبة والفتور اللتين تنتابانه بين فينة و أخرى تدفعانه إلى أن يشكك في صحة عمله، على الرغم من أنه كان يتمتع بدعم بعض معارفه أمثال الرياضي هرميت - Hermite. و استمرت أزمته النفسية حتى فارق الحياة في عام 1918 م في مدينة هيل الألمانية. و كانت حياته مأساة إنسانية مؤلمة، لم يحرم، أو يُعترف بفضله، و أثره، إلا بعد رحيله، حيث كرمه واحد من أعظم رياضي النصف الأول من القرن العشرين، و هو الرياضي الألماني ديفيد هيلبرت Hilbert، حين وصف عمله: " بأنه من أكثر الأشياء دهشة مما أنتجه التفكير الرياضي، و واحد من أجمل إنجازات النشاط الإنساني في مجال القضايا سهلة التناول ... و أنه لن يظردنا أحد من الفردوس الذي أوجده لنا كانتور ".

و لكي نستطيع مواكبة كانتور في عمله لا بد من بعض التعريفات البسيطة. نقول عن مجموعتين غير منتهيتين إن لهما " العدد الموغل " Transfinite number نفسه، إذا وجد تقابل واحد إلى واحد بين عناصرهما. و هذا يعرف المساواة بين عددين موغلين لمجموعتين. و إذا وجد تقابل واحد إلى واحد بين مجموعة أولى X و مجموعة ثانية Z ، التي هي عبارة عن مجموعة جزئية من مجموعة ما Y ، و لا تساويها، نقول عندها إن Y تملك عدداً موغلاً أكبر من العدد الموغل للمجموعة X . و من ثم فإن مجموعة الأعداد الطبيعية، و مجموعة الأعداد العادية (الكسرية)، و كذلك الأعداد الزوجية لها العدد الموغل نفسه. و قد رمز له كانتور بالرمز \aleph (وهو الحرف الأول من الأبجدية العبرية)، و هو أول عدد لا نهائي.

و السؤال الأكثر أهمية هو: هل أي مجموعة غير منتهية قابلة للعد؟ أي أن لها " العدد الموغل " لمجموعة الأعداد الطبيعية. و في

مدى شرعية معالجة المجموعات غير المنتهية ككائنات محددة. كما أن بعض دارسي علم اللاهوت أبدوا قلقهم من أن يكون التحليل الرياضي للأعداد غير المنتهية، بصورة ما، شكلاً من أشكال التعرض للذات الإلهية. و انبرى كانتور للرد على معظم هذه الاعتراضات في مقال نشره عام 1885م؛ حيث ميز فيه بين ثلاثة أنواع من اللانهائيات. النوع الأول هو " اللانهائية المطلقة " Absolute Infinite، و هي لا نهاية علم اللاهوت، و النوع الثاني منها تتعلق بالعالم الفيزيائي: سلم الزمن اللانهائي، و عدد النجوم اللانهائي. و النوع الثالث ما يعنى به الرياضيون في دراستهم للمجموعات غير المنتهية، كمجموعة الأعداد الأولية، أو مجموعة نقاط مستقيم، أو غير ذلك. و نتائج كانتور هذه قادتته إلى تأسيس " نظرية المجموعات " التي تغلغت في رياضيات القرن العشرين، و على نحو خاص، في المنطق، و التولوجيا، و التحليل. و منشأ ذلك أن الكائنات الرياضية لا تدرس ككائن فردي قائم بنفسه، بل كعناصر في مجموعة، أو تجمع يحوي عدداً لا نهائياً من الأشياء من النوع نفسه. لذلك أضحت الرياضيات الحديثة برمتها تصاغ بلغة نظرية المجموعات، كما أنها أصبحت المنطلق في دراسة الأساس الفلسفي، و المنطقي، للرياضيات. كما أرخت بظلالها على تدريس الرياضيات في العالم بدءاً من منتصف القرن العشرين. و على الرغم من أن ما قدمه كانتور كان علامة فارقة في المعرفة البشرية، و في الفكر الإنساني، و في غاية الأصالة، بيد أنه لم يحصل على مركز علمي مرموق يليق به. فقد أمضى معظم حياته الأكاديمية في جامعة ألمانية صغيرة، و متواضعة، قياساً بالجامعات الألمانية الأخرى. و كان طموحه أن يحصل على كرسي للتدريس في جامعة برلين، لكنه أخفق في ذلك. و كان ينحي باللائمة في هذا على الرياضي الألماني كرونكر Kronecker (1823 - 1891). و يعزى سبب ذلك إلى التعارض بين آرائيهما على المستوى الرياضي، حيث كان كرونكر يؤمن بوجهة نظر فيثاغورث القديمة، التي تنص على " أنه يجب بناء الحساب والتحليل على الأعداد الطبيعية "، و حض على " ثورة حسابية " تحرم استخدام الأعداد الصماء (الجذور) (مثل $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ...) مسوغاً ذلك بإنكار وجود مثل هذه

عناصر المجموعة نفسها، ليصل إلى أن هناك عدداً موهلاً ثالثاً هو " عدد " عناصر مجموعة المجموعات الجزئية لمجموعة الأعداد الحقيقية، و عدداً موهلاً رابعاً هو " عدد " عناصر مجموعة المجموعات الجزئية للمجموعة الأخيرة، وهكذا دواليك. و منها خلص إلى أن عدد الأعداد غير المنتهية غير منته أيضاً. ثم بعد ذلك تساءل كانتور: إن كان يوجد عدد لا نهائي ما أكبر تماماً من \aleph و أصغر تماماً من C المذكورين آنفاً، فكانت إجابته بالنفي على ذلك، حيث اعتقد أن العدد اللانهائي الذي يلي مباشرة \aleph هو C ، لكنه لم يستطع برهان ذلك. و عُرف هذا الاعتقاد في أدبيات الرياضيات بفرضية المتصل (المستمر) **The continuum-hypothesis**. و في عام 1963 برهن الرياضي بول كوهن **P.Cohen** أن هذه القضية لا يمكن البت فيها ضمن الإطار الحالي لنظرية المجموعات المبني على موضوعات زرمليو-فرانكلين.

رسالة وجهها كانتور إلى صديقه ديدكند في 7 ديسمبر (كانون أول) 1873 يعلمه فيها أنه اكتشف برهاناً على أن مجموعة الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد مع أنها غير منتهية، و هي بذلك تحوي عناصر " أكثر " من مجموعة الأعداد الطبيعية. و رمز لعدد عناصرها بالرمز C (وهو الحرف الأول من كلمة المتصل **Continuum**)، و هي اسم آخر لمجموعة الأعداد الحقيقية). و هو عدد لا نهائي ثان عرفه كانتور. و العلاقة بين \aleph و C هي أن: $2^{\aleph} = C$ ، أي أن " عدد " عناصر مجموعة المجموعات الجزئية لمجموعة الأعداد الطبيعية يساوي " عدد " عناصر مجموعة الأعداد الحقيقية (برهان ذلك في كتب التحليل الرياضي). و مجموعة المجموعات الجزئية لمجموعة ما تعني مجموعة أجزاء كل المجموعة بما فيها المجموعة الخالية، و المجموعة نفسها.

ثم استخدم كانتور أن عدد عناصر مجموعة المجموعات الجزئية لمجموعة ما أكبر من عدد

ومن الجدير بالذكر أن " اللانتهية " ليس شيئاً كبيراً، كما قد يظن بعضهم، بل هو شيء غير ذلك تماماً. كما يعتقد بعضهم أن المجموعة غير المنتهية تحوي كل شيء. بيد أن هذا الكلام غير صحيح إطلاقاً. فمثلاً ليس من الضروري أن تحوي أي مجموعة غير منتهية من الأعداد الطبيعية العدد 13. فنجد، على سبيل الذكر لا الحصر، أن مجموعة مضاعفات العدد 2 لا تحوي، مثلاً، العدد 13. كذلك الحال مضاعفات العدد 3، أو مضاعفات العدد 4،... و كل هذه المجموعات غير المنتهية لا تحوي العدد 13، باستثناء مجموعة مضاعفات العدد 13 نفسه.

كذلك ليس من الضروري أن تكون المجموعة غير المنتهية " كبيرة "، بل من الممكن أن تكون صغيرة. فإذا كان لدينا مجموعة عبارة عن قطعة مستقيمة طولها واحدة الأطوال (1 سنتمتر، مثلاً)، وقسمناها إلى جزئين، ثم تابعنا عملية القسمة تلك دون توقف، فإننا نحصل على عدد غير منته من القطع المستقيمة.

و تُستخدم المجموعات غير المنتهية في عديد من المجالات في الاختصاصات العلمية، ومن ضمنها الهندسة. و يُستخدمها هؤلاء إلى حد ما، برضا وسرور لأنها فعالة. ولكنهم يعدونها صندوقاً أسوداً، وفق تعبير الكاتب الإنكليزي براين كليغ **Brain Clegg** مؤلف كتاب " موجز تاريخ اللانهاية " **A Brief History of Infinity**، حيث نستخدمها ولا نعرف شيئاً عنها، كما هو الحال في استخدامنا للحاسوب.

الرياضيات والمسلمات.. إضاءة تاريخية

د. محمود باكير

من المعروف أن الرياضيات – ببساطة – استنتاجات منطقية لقضايا جديدة من قضايا قديمة سبق إثباتها؛ وهكذا دواليك، إلى أن نصل إلى قضايا يُسَلَّمُ بها وحدها دون برهان. بمعنى أنه ليس ثمة استدلال رياضي دون وجود معطيات أولية. ومن ثم لبناء أي " نظام رياضي "، أو " نظام منطقي "، لابد من وجود بداية، أو قاعدة، للانطلاق منها. وهذه البداية أضحت الآن (في الفكر الرياضي الحديث) تتألف من كلمات معينة، غير قابلة للتعريف تسمى اللامعرفات *undefined terms*، أو مفاهيم أولية *primitive terms*، ومن قضايا أولية، تسمى مسلمات، أو موضوعات، أو أحياناً تسمى اللامبرهنات. والمسلمة علاقة لا تستخرج من علاقة، أو من قضية *proposition* أخرى؛ أو بصياغة ثانية، هي بيان *statement* غير مثبت صحته.

وربما كان الفيلسوف الإغريقي أرسطو (384-322 ق.م)، الذي يعده المنطقة مؤسس علم المنطق، أول من أبدى انتباهها لماهية المسلمات. فقد كان عنده حقائق أولية، أو أشياء للبدء بها. وهذه الحقائق نوعان : النوع الأول " أوليات " *axioms*، ومنها تُستنتج حقائق العلم. ومن الأوليات عنده الحدود، أي التعريفات. والنوع الثاني هو " المصادر " *postulates*، ومنها يُثبت وجود أشياء العلم. والمصادر لازمة – من وجهة نظره – لإثبات أن الشيء موجود في الطبيعة. فلا يكفي أن نصوغ للشيء التعريف المناسب إذا كان هذا الشيء غير موجود. بيد أن أشهر نظام رياضي ابتكره إقليدس بعد وقت قصير من أرسطو وورد في كتابه الأسطقات *Stoixia* الذي سماه العرب كتاب " الأصول "، ويعرف بالإنكليزية باسم " *The Elements of Euclid* " (1). فقد استهل المقالة الأولى بخمس أوليات عامة، أو بديهيات (الأشياء المساوية لشيء واحد متساوية،...، الكل أعظم من الجزء). كما عرّف النقطة، والخط، والدائرة، فوجد لزاماً عليه أن " يصادر " على وجودها، فوضع المصادر الخمس المعروف للهندسة الإقليدية (2). و" المصادر " كما يدل عليها جذرها (يصادر على، أو يطالب بـ = *postulare*) تعد " مطلباً " يتقدم به الرياضي لأن نسلم له بالبداية (القضايا الأولية) للحصول على النتائج بعد سلسلة من المحاكمات المنطقية.

إن عمل إقليدس كان نقطة انعطاف في تاريخ الفكر الرياضي، على الرغم من أن التعاريف، والمصادر،
في كتابه المذكور، قد لا تلبي المتطلبات الحديثة من حيث الدقة، والصرامة. فقد تبين لاحقاً، وعلى خلاف ما قام
به إقليدس، من أن " النقطة " و " المستقيم " كلمتان من اللامعرفات في الهندسة. وأكثر دقة، فإن ثمة ثلاث
كلمات في الهندسة الإقليدية لا يمكن تعريفها. وهذه الكلمات هي نقطة، ومستقيم، ومتطابق congruent؛ أو
هناك خيار آخر، " نقطة "، و " مستقيم "، و " بين " between. وأما بقية مفاهيم الهندسة فإنها تُعرّف
باستخدام هذه الكلمات الأولية الثلاث.

وهذه النزعة قد تجذرت في الفكر الرياضي الحديث، حيث يتم البحث، دوماً، في كل فرع من فروع
الرياضيات البحتة عن اللامعرفات فيه، إضافة إلى موضوعاته (مسلماته). فقد أثبت الرياضي الإيطالي
غيوزيب بيانو Giuseppe Peano (1858-1932)، مثلاً، أن نظرية الأعداد الطبيعية كلها يمكن أن تستق من
ثلاثة مفاهيم أولية (غير قابلة للتعريف)، وخمس مسلمات، إضافة إلى قضايا المنطق. والمفاهيم الثلاثة الأولية
هي الصفر، والعدد، والتالي. فمثلاً، تالي العدد صفر هو الواحد، وتالي الواحد هو اثنان، وهكذا دواليك.

وقد شغلت مشكلة وضوح البديهيات، أو الأوليات، حيزاً كبيراً من اهتمام الرياضيين، و الفلاسفة، قديماً،
وأقضت مضاجع كثيرين منهم. فما هو بديهي لشخص معين قد لا يكون بديهياً لشخص آخر. وإذا قلنا إن البديهي
هو الذي يكون بديهياً لقطاع واسع من البشر، فإن تاريخ العلم حافل بالأمثلة عن " حقائق دامغة " كان يعتقد بها
هؤلاء ثم تبين أنها غير صحيحة. من هذه الأمثلة عدم كروية الأرض، وأن مدارات الكواكب حول الشمس
دائرية الشكل، والأجسام الثقيلة تسقط أسرع من تلك الخفيفة. و أكثر الناس مابرحوا إلى يومنا هذا يعتقدون أن
لكل سطح وجهين، مع أن الرياضي الألماني موبيس A.F. Mobius (1790-1868) بين في عام 1858 م أن
ثمة سطوحاً أحادية الوجه، لا وجود فيها لمفهومي " الداخل " و " الخارج "، أو " الوجه " و " القفا ". كما أن
هناك سطوحاً أخرى مغلقة مثل " زجاجة كلاين "، نسبة إلى الرياضي الألماني كلاين F. Klein (1849-
1925) ليس لها " داخل " أو " خارج " (3).

و البداية الفعلية لظهور إرهابات التحول الكبير في الفكر الرياضي كانت في النصف الأول من القرن
التاسع عشر الميلادي على يد الرياضيين بولياي J. Bolyai (1802-1860م)، ولاباشيفسكي N. Lobachevski
(1793-1856م) في عمليهما المتميزين الذي أصبح يطلق عليهما لاحقاً اسم " الطريقة
الموضوعاتية " axiomatic method (نسبة إلى موضوعة) في البناء الرياضي. فكل واحد منهما أوجد،

على حدة، خدمته اللاإقليدية. وكان ذلك إيذاناً بالتححرر من السيطرة الإقليدية التي هيمنت على الفكر الهندسي رداً من الزمن دام نحو ألفي سنة. بل كان ذلك فتحاً علمياً أذن بولوج الفكر الرياضي في مرحلة جديدة. فقد استنتج لاباشيفسكي أن المصادر الخمسة لإقليدس، التي تسمى مصادر التوازي (من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم واحد فقط مواز له)، مستقلة عن المصادر الأربعة الأخرى. فضلاً عن ذلك، فإنه من الممكن وضع مصادر أخرى مغايرة تماماً لها، ومع ذلك تبقى البنية الكلية للمصادر الخمس الجديدة متمسكة (منسجمة) consistent. والمصادر التي وضعها في بنائه الجديد هي : " من نقطة خارج مستقيم معطى، يوجد على الأقل مستقيمان يوازيان هذا المستقيم ". ثم جاء الرياضي الألماني جورج فريدريك ريمان Riemann (1826-1866)، وشكّل بناء هندسياً مختلفاً عن بناء إقليدس، ولاباشيفسكي، ومصادره تقول بأنه: " لا يوجد خط مستقيم يمكن رسمه من نقطة خارجة عن مستقيم معطى مواز لهذا المستقيم ". ونتج عن كل ذلك ما أضحي يطلق عليه الآن في الأدبيات الرياضية الهندسات اللاإقليدية.

هذا ولم يعد ثمة وجود لكلمة " بديهية " - بالمعنى الشائع لها - في الفكر الرياضي الحديث، بل إن هذه الكلمة أضحت عارية عن أي معنى من وجهة نظر الرياضيات الحديثة. كما أصبح من الصعب الآن الحكم على " صحة " مسلمت نظام رياضي؛ بل إن بعضهم يعد هذا السؤال، بحد ذاته، ليس له معنى. لأن أي نظام رياضي يبني على مجموعة من المسلمت يعد مقبولاً إذا كان متمسكاً (منسجماً) منطقياً؛ بمعنى أن لا تفضي هذه المسلمت إلى مبرهنة (نظرية) ونقيضها، في أن واحد. فلم يعد مطلوباً من المسلمت، أو من نتائج المبرهنات، أن تكون منسجمة مع مفهومنا الشخصي للحقيقة. فبعض المسلمت تبدو صحيحة، وبعضها غير ذلك، وبعضها الآخر يبدو أنه حتى من الصعب الحكم على صحتها، أو خطئها. والنظام الناشئ، يعد نظاماً رياضياً مقبولاً، إذا كان متمسكاً منطقياً. وهذا أفضى إلى أن " الانسجام "، أو " الاتساق "، وليس " الحقيقة "، هو الذي أضحي مفتاح الفكر الرياضي الحديث. بل إن المسلمت في الرياضيات الحديثة أضحت أبعد ما تكون عن الوضوح. والمهم جداً هنا هو أن يكون هذا النظام " مفيداً ". فالفراند التي جنيناها من كل من هندسة إقليدس، ولاباشيفسكي، وريمان، لا يختلف عليهما اثنان، ولكن لكل نظام مجاله، وتطبيقاته⁽⁴⁾. ومع نهاية القرن التاسع عشر الميلادي، شرع الرياضيون في المطابقة بين الكلمات: " موضوع "، و " مسلمة " axiom، و " فرضية " assumption، و " مصادر ". وأصبحت تعد هذه الكلمات مترادفة رياضياً. وبعد عام 1936م هو لحظة

الفصل في عملية المطابقة تلك حينما نشر بحثاً كان نقطة الانعطاف الكبيرة⁽⁵⁾.

وقد برّر بعضهم طغيان كلمة (axiom) في الأدبيات الرياضية المعاصرة أكثر من كلمة (postulate) لسهولة الاشتقاق منها في اللغات الأوربية الحديثة من إنكليزية، وفرنسية، على خلاف الكلمة الثانية. وصفوة الكلام أن أكثر العلوم موضوعية، ودقة، قامت على " التسليم " بمجموعة من المسلمات. وما تبقى يشتق من هذه المسلمات، أو بالأحرى يُستنتج منطقياً منها. وهذا ليس عيباً في النظام الرياضي، بل على العكس من ذلك، فإن هذا أهم ما يمتاز به عن غيره كعلم مبني منطقياً.

ومن الجدير بالذكر أنه لم يزل إلى يومنا هذا، في بلادنا، بعض دارسي الفلسفة من نصوصها المخترقة في القدم يميزون بين البديهية، والمسلمة، في الرياضيات، أو في فلسفتها. كما أنه لم يزل بعضهم من كتّاب العربية إلى الآن يترجم كلمة (axiom) بمعنى " بديهية "، بدلاً من " مسلمة "، أو " موضوعة "، وذلك نقلاً عن معاجم اللغة الإنكليزية - العربية، التي تترجمها على ذلك النحو. ومصدر هذه الترجمة، أساساً، هو ما أقره مجمع اللغة العربية في القاهرة، في الثلاثينيات من القرن العشرين، حينما ترجمها على ذلك النحو، وكان ذلك مبرراً في حينها. وقد أن الأوان للتوقف عن استخدام كلمة " بديهية "، على الأقل، في هذا الإطار، خاصة وأن معناها اللغوي لا يقارب المعنى المستخدم حالياً. ففي الصحاح (تجديد صحاح العلامة الجوهري) نجد في مادة بده : " البداهة أول جري الفرس...وبادته : فاجأه. والاسم البداهة والبديهة. وهما يتبادهان بالشعر، أي يتجاربان ". والبديهية (لغوياً) في المحيط (الفيروز أبادي) : " أول كل شيء وما يفجأ منه...ولك البديهية أي لك أن تبدأ ".

وطول الفترة التاريخية التي استغرقتها عملية النضوج اللغوية - الفكرية تلك، وإدراكها على نحو واضح، ومبلور، يعزى إلى طبيعة التجربة الفكرية المتعلقة بذلك. كما أنه مؤشر على الطبيعة المضنية لتلك التجربة التي استمرت حوالي ألفي سنة. يقول عالم النفس الأمريكي إريك فروم (Eric Fromm) (1900-1980) : " ينبغي أن نعلم أن كثيراً من التجارب لا تمنح نفسها بسهولة بحيث يتم تصورهما في الإدراك " (6). إن الأحاسيس المتعلقة ببقاء الفرد، أو الجماعة، كالجوع والخوف، يمكن تصورهما على نحو واع وبسهولة، أما حين يتعلّق الأمر بتجربة أكثر دقة، أو تعقيداً، فإن التجربة لا تصل إلى الإدراك في العادة، لأنها ليست مهمة بما يكفي لأن تجذب الانتباه (7).

ولن نعرّج على حقيقة مدلول القضايا الرياضية، فهي من المسائل الخلافية بين الفلاسفة؛ بل جُل ما نصبو إليه هو الإشارة إلى الطبيعة الموضوعاتية في بناء النظام الرياضي في الفكر الرياضي الحديث، وفاعليته في

إطار الرياضيات. وبما أن الرياضيات أساس كل العلوم التي تبحث عن الحقيقة، فإن تلك الطريقة مرشحة لأن تؤول إلى منهج عام لبناء التفكير المنطقي المترابط عند الإنسان. وهذا يذكرنا بقول الرياضي البريطاني غودفري هارولد هاردي Hardy (1877-1947م) : " إن الرياضيات البحتة هي دراسة كيف يجب أن يفكر الناس لكي يحصلوا على نتائج صحيحة، وهي لا تأخذ في الحسبان الضعف الإنساني ".

و الطريقة الموضوعاتية ليست عيباً منطقياً، كما قد يظن بعضهم، بل إنها أضحت أداة فعالة في عديد من الحقول المعرفية؛ وأن اكتشافها كان نقطة انعطاف في الفكر الإنساني، و إغناء له، لما تستبطنه من صرامة فكرية. وخاصة إذا عرفنا أن ثمرة الصرامة هي الإبداع، وأول من أشار إلى ذلك الرياضي الألماني كارل فريدريك غاوس C.F.Gauss (1777 - 1855). يقول رولان أمينيس : " و غاوس على أي حال جدير بكل تقدير، لأنه أعلن أن الصرامة هي أم الإبداع " (8).

الهوامش :

1- حققه د. أحمد سليم سعيدان تحت اسم " هندسة إقليدس في أيد عربية "، دار البشير (عمان)، 1411هـ = 1991م.

2- لمزيد من المعلومات انظر المرجع السابق.

3- انظر، مثلاً، " Mathematics :The New Golden Age", K. Devlin ,Penguin Books, 1988

4- لمزيد من المعلومات انظر للكاتب: " هل معنى البديهية بديهي؟ " في " دراسات لغوية من منظور رياضي "، الصفحة 87، جامعة دمشق، 2015.

5- Univ. of New Mexico Bulletin, Philosophical Series, Vol. 1 ,No.2 , Oct.1, 1936

6- انظر مجلة المعرفة، وزارة الثقافة (سورية)، العدد 430 (1999)، الصفحة 116.