البنى الجبرية ٢

السنة الثانية

12-4-2017

نظري

◄ دكتور المادة : ريم الحاج خليفة

◄المحاضرة : التاسعة عنوان المحاضرة : التشاكل الحلقي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- تعريف التشاكل الحلقي .

٢- تعريف نواة التشاكل الحلقي.

٣-مبرهنة تخص خواص التشاكل الحلقي .

تعريف التشاكل الحلقي :

ليكن $(S,+,.)$,$(\mathcal{R}\,,+,.)$ حلقتين عندئذٍ نسمي كل تطبيق $\mathcal{F}:\mathcal{R}\longrightarrow S$ تشاكلاً حلقياً اذا تحققت الشروط الآتية :
$\forall a,b\in\mathcal{R};$

١- $f(a+b)=f(a)+f(b)$

٢- $f(a.b)=f(a).f(b)$

٣- $f(1)=1$

حيث العدد (١) هو عنصر الوحدة في الحلقة $(\mathcal{R},+,.)$.

تعريف نواة التشاكل الحلقي :

ليكن $f:\mathcal{R}\longrightarrow S$ تشاكلاً حلقياً نسمي المجموعة $\ker f=\{a: a\in\mathcal{R}, f(a)=0\}$ بنواة التشاكل الحلقي f .

مبرهنة :

ليكن $\mathcal{R},S$ حلقتين و التطبيق $f:\mathcal{R}\longrightarrow S$ تشاكل حلقي عندئذٍ الشروط الآتية متوفرة :

١- $f(0)=0$

٢- $\forall\ a\in\mathcal{R}\,; f(-a)=-f(a)$

٣- إذا كان $a\in\mathcal{R}$ عنصراً قابلاً للقلب عندئذٍ $f(a)$ هو عنصر قابل للقلب في S حيث $f(a^{-1})=f(a)^{-1}$.

٤- أياً كان العدد الصحيح الموجب n فإنه يتحقق : $f(a^n)=f(a)^n,\ f(na)=nf(a)$

٥- إذا كانت A حلقة جزئية من $\mathcal{R}$ فإن $f(A)$ حلقة جزئية في S .

٦- إذا كانت $\mathcal{R}$ حلقة تبديلية فإن $f(\mathcal{R})$ تكون تبديلية .

٧- $\ker f$ تشكل حلقة جزئية في $\mathcal{R}$.

٨- التشاكل f متباين عندما وفقط عندما يكون $\ker f=\{0\}$.

البرهان :

١- إن $f(0)$ يمكن أن تكتب بالشكل : $f(0)=f(0+0)$ وبما أن f تشاكل حلقي فإن $f(0)=f(0)+f(0)$ نطرح من الطرفين $f(0)\Leftarrow$ $0=f(0)$.

٢- ليكن $a \in \mathcal{R}$ عندئذ $\exists -a \in \mathcal{R}$ اي $-a + a = 0$ حسب الطلب (١) وبما أن f تشاكل حلقي يكون لدينا

$$f(-a+a) = f(-a) + f(a) = f(0) = 0$$

نطرح من الطرفين $-f(a)$

$$\Leftarrow f(-a) = -f(a)$$

٣- ليكن $a \in \mathcal{R}$ عنصراً قابلاً للقلب عندئذٍ يوجد عنصر $a^{-1} \in \mathcal{R}$ يحقق $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$ بما أن f تشاكل حلقي فإن

$$f(1) = f(aa^{-1}) = f(a).f(a^{-1})$$

$$\Rightarrow f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$$

٤- ليكن $a \in \mathcal{R}$ وليكن $n > 0$ عدداً صحيحاً موجباً عندئذٍ

$$f(na) = f(a + a + \cdots \ldots . + a)$$

وبما أن f تشاكل نستطيع أن نكتب $= f(a) + f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = nf(a)$

من أجل المساواة الثانية نكتب ما يلي

$$f(a^n) = f(a.a \ldots\ldots a) = f(a).f(a) \ldots . f(a) = f(a)^n$$

٥- **تذكرة :** نقول عن مجموعة ما ولتكن المجموعة S أنها حلقة جزئية إذا تحقق الشرطان :

- $\forall a.b \in S \,; a - b \in S$
- $\forall\, a, b \in S \,; a.b \in S$

بفرض أن A حلقة جزئية في $\mathcal{R}$ فإن $f(A) = \{f(a); a \in A\}$ وبما أن $0 \in A$ عندئذٍ $0 \in f(A)$ إذا $f(A) \neq \emptyset$.

ليكن $a, b \in f(A)$ عندئذٍ يوجد $x, y \in A$ بحيث $f(x) = a \,, f(y) = b$

$$a - b = f(x) - f(y) = f(x) + \underbrace{f(-y)}_{\text{حسب الخاصية 2}} = f\Big(\underbrace{x - y}_{\in A}\Big) \in f(A)$$

فالشرط الأول محقق لنتحقق من الشرط الثاني

$$a.b = f(x).f(y) = f\Big(\underbrace{x.y}_{\in A}\Big) \in f(A)$$

عندئذٍ $f(A)$ حلقة جزئية في S .

٦- $\forall x, y \in \mathcal{R}$ فإن $x.y \in \mathcal{R}$, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ عندئذٍ بما أن f تشاكل فإن $y + x = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ لأن $\mathcal{R}$ تحقق التبديلية الجمعية

$$f(x) + f(y) = f(x+y) = f(y+x) = f(y) + f(x)$$

ومن جهة اخرى بما أن f تشاكل :

$x.y = y.x$ لأن $\mathcal{R}$ تحقق التبديلية الضربية فرضاً

$$f(x).f(y) = f(x.y) = f(y.x) = f(y).f(x)$$

$\Leftarrow f(\mathcal{R})$ حلقة تبديلية .

-٧ $\boldsymbol{\ker f = \{a : a \in \mathcal{R}, f(a) = 0\}}$

بما أن $\boldsymbol{0 \in \mathcal{R}}$ فإن $\boldsymbol{f(0) = 0}$

$$\Rightarrow 0 \in \ker f \Rightarrow ker f \neq \emptyset$$

ليكن $x, y \in \ker f$ عندئذٍ $x, y \in \mathcal{R}$ ومنه $x.y \in \mathcal{R}$

بالإضافة إلى $f(x) = f(y) = 0$ (اي عنصر موجود في $\boldsymbol{kerf}$ صورته تساوي الصفر)

$$f(x-y) = f(x) - f(y) = 0 \Longrightarrow x - y \in \ker f$$

صورة $x - y$ تساوي صفر فإن هذا العنصر ينتمي ل $\boldsymbol{kerf}$ حسب تعريف $\boldsymbol{kerf}$.

$$f(x.y) = f(x).f(y) = 0 \Longrightarrow x.y \in \ker f$$

صورة $x.y$ تساوي صفر فإن هذا العنصر ينتمي ل $\boldsymbol{kerf}$ حسب تعريف $\boldsymbol{kerf}$.

ومنه $\ker f$ حلقة جزئية .

-٨ $(\Rightarrow)$ لنفرض أن $\ker f = \{0\}$

(نريد اثبات التباين نأخذ عنصرين من المستقر نقول انهما متساويان ومن ثم نثبت أن عناصرهما بالمنطلق متساويان فيكون التطبيق متباين)

$$\forall x, y \in \mathcal{R}; f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = 0$$

وبما أن f تشاكل حلقي $\Rightarrow f(x-y) = 0$

$\Rightarrow x - y \in \ker f$ عنصر صورته صفر فهاذا العنصر ينتمي ل $\ker f$

ولدينا فرضاً $\ker f = \{0\}$

$$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

وبالتالي $\boldsymbol{f}$ متباين .

$(\Leftarrow)$ لنفرض أن $f : \mathcal{R} \to S$ متباين وبما أن $\ker f$ حلقة جزئية من $\mathcal{R}$ فإن $0 \in \ker f$ ومنه

$$\underbrace{\{0\} \subseteq \ker f}_{*}$$

من تعريف النواة $\forall x \in \ker f \ : f(x) = 0$

وبما أن f تشاكل حلقي وأن $f(0) = 0$ وبالتالي $f(x) = f(0)$ ومنه $x = 0$ لأن f متباين

$$\forall x \in \ker f \ : x \in \{0\} \Longrightarrow \underbrace{\ker f \subseteq \{0\}}_{**}$$

من * وَ ** نجد أن $\ker f = \{0\}$

انتهت المحاضرة

إعداد: لبنى الطون – محمد فهمي القاضي – أحمد ابو التوت