نظري

◄ دكتور المادة: ملك ماورديني

◄ المحاضرة السابعة

عنوان المحاضرة: تحويلات لابلاس

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-سوف نقوم بحل تمرين نهتم به (المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية وبأمثال متغيرة)

2-وسوف ندخل بفصل جديد وهو تحويلات لابلاس وتطبيقاتها في حل المعادلات التفاضلية

مثال: أوجد حل المعادلة التفاضلية بجوار $x_0 = 0$:

$$1)\ x^2y" - (x+2)y = 0$$

$$2)\ y" - \frac{x+2}{x^2}y = 0$$

نلاحظ أن النقطة $x = 0$ نقطة شاذة نظامية حيث:

$P = (x-0)p(x) = (x-0).0 = 0$: موجودة

$Q = (x-0)^2.q(x) = x^2.\frac{-x-2}{x^2} = -2$: موجودة

ومنه $x = 0$ نقطة نظامية ومنه نبحث عن حل للمعادلة التفاضلية من الشكل:

$$\boxed{y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\lambda}}$$

ومنه لنوجد المشتقات :

$$y' = C_n(n+\lambda)\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+\lambda-1}\ \&\&\ y" = C_n(n+\lambda)(n+\lambda-1)\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+\lambda-2}$$

نعوض في المعادلة كلا من $y", y$ ومنه :

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+\lambda)(n+\lambda-1)x^{n+\lambda} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\lambda+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\lambda} = 0$$

نقسم على x^{λ} ونبدل كل n ب $n-1$ في المتسلسلة رقم (2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+\lambda)(n+\lambda-1)x^{n} - \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^{n} - 2\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n} = 0$$

الآن نوجد الحدود الدنيا للمتسلسلات وذلك بجعل جميع المتسلسلات تبدأمن الحد $n=1$ وذلك عن طريق الحد $n=0$ من المتسلسلة الأولى والثالثة فتصبح كما يلي :

$$\lambda(\lambda-1)C_0 - 2C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[[(n+\lambda)(n+\lambda-1)-2]C_n - C_{n-1}]x^n = 0$$

بالمطابقة الآن ومنه

$$\lambda(\lambda-1)-2=0 \to \lambda^2-\lambda-2=0 \to (\lambda-2)(\lambda+1)=0 \qquad : C_0 \neq 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = 2 \ \&\& \ \lambda_2 = -1}$$

$$[(n+\lambda)(n+\lambda-1)-2]C_n - C_{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{C_{n-1}}{(n+\lambda)(n+\lambda-1)-2} \qquad : n \geq 1$$

ومنه الحل الخاص الأول نعوض $\lambda = 2$

$$C_n = \frac{C_{n-1}}{(n+1)(n+2)-2} = \frac{C_{n-1}}{n(n+3)} \quad \Rightarrow$$

$$if \ \ n=1 \Rightarrow C_1 = \frac{C_0}{4} \quad \&\& \ if \ \ n=2 \to C_2 = \frac{C_1}{10} = \frac{C_0}{40}$$

$$if \ \ n=3 \Rightarrow C_3 = \frac{C_2}{18} = \frac{C_0}{18.40} \ldots\ldots\ldots$$ وهكذا على التوالي

نعوض الثوابت في الحل العام مع الفرض أن $C_0 = 1$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\lambda} \quad \&\& \ \lambda_1 = 2$$

$$y_1 = x^2 + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{40} + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

والآن لإيجاد الحل الخاص الثاني كون $\lambda_1 - \lambda_2 \in Z$ فإن الحل الخاص الثاني كمايلي:

$$y_2 = a y_1 \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^{n+\lambda_2}$$

حيث أن B_n ثوابت تختلف عن الثوابت C_n وذلك تبعاً للجذر الجديد $\lambda_2 = -1$ للحصول على الثوابت $B_n \&\& a$ نشتق y_2 (بعد تعويض y_1) لنوجد $y_2' \&\& y_2''$

$$y_2' = a\left(2x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{4}{40}x^3 + \cdots \ldots ..\right)\ln(x) + a\left(x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{40} + \cdots \ldots \ldots \ldots\right) + \left(-\frac{b_0}{x^2} + b_2 + 2b_3 x + \cdots \ldots \ldots \ldots ..\right)$$

$$\Rightarrow y_2'' = a(2 + \frac{6}{4}x + \frac{12}{40}x^2 + \cdots \ldots \ldots)\ln(x) + a(2 + \frac{3}{4}x^1 + \frac{4}{40}x^2 + \cdots \ldots ..) + a(1 + \frac{2}{4}x + \frac{3}{40}x^2 + \cdots \ldots \ldots) + \frac{2b_0}{x^3} + 2b_3 + \cdots \ldots \ldots$$

الآن نعوض كلا من ((y_2' و y''_2))في المعادلة الأصلية ومنه:

$$x^2 y\text{-}(x+2)y=0 \rightarrow x^2 y - xy - 2y = 0$$

$$a\left[2x^2 + \frac{6}{4}x^3 + \frac{12}{40}x^4 + \ldots \ldots \ldots\right]\ln(x) + a\left[2x^2 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{4}{40}x^4 + \ldots \ldots\right] +$$
$$a\left[x^2 + \frac{2}{4}x^3 + \frac{3}{40}x^4 + \ldots \ldots \ldots \ldots\right] + \frac{2b_0}{x} + 2b_3 x^3 + \ldots \ldots .$$
$$+a\left[-x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{40} \ldots \ldots \ldots\right]\ln(x) - b_0 - b_1 x - b_2 x^2 - b_3 x^3 \ldots \ldots \ldots$$
$$+a\left[-2x^2 - \frac{2}{4}x^3 - \frac{2}{40}x^4 + \ldots \ldots \ldots\right]\ln(x) - \frac{2b_0}{x} - 2b_1 - 2b_2 x$$

((نلاحظ أن أمثال $\ln(x)$ معدومة وذلك إذا أخرجنا $\ln(x)$ عامل مشترك ستزول الحدود داخل الأقواس لأنها متساوية ومختلفة بالإشارة)) ومنه ....

$$a\left[3x^2 + \frac{5}{4}x^3 + \frac{7}{40}x^4 + \ldots \ldots \ldots\right] + (-b_0 - 2b_1) + (-b_1 - 2b_2)x - b_2 x^2 = 0$$

ومنه بالمطابقة نجد أن $b_0 = 1 \ \&\& \ -b_0 - 2b_1 = 0 \to b_1 = -\frac{1}{2}$

$b_2 = -\frac{b_1}{2} = \frac{1}{4}$: طابقنا أمثال x بالصفر $\&\& -b_2 + 3a = 0 \to a = \frac{1}{12}$

نعوض الآن الثوابت $a \ \&\& \ B_n$ في الحل الخاص y_2

$$y_2 = a y_1 \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^{n+\lambda_2}$$

$$= a\left(x^2 + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{4} + \ \dots\dots\dots\right)\ln(x) + \frac{1}{x}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ \dots\dots.)$$

$$= \frac{1}{12}\left(x^2 + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{4} + \ \dots\dots\dots\right)\ln(x) + \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{2}x + \ \dots\dots\right)$$

ومنه الحل العام

$$\boxed{y = Ay_1 + By_2}$$

والآن ستكون البداية مع الفصل الجديد ....

تحويلات لابلاس وتطبيقاتها في حل المعادلات التفاضلية :

تحويل لابلاس : ليكن لدينا الدالة $f(t)$ التابعة للمتغير t وهو الزمن عندئذ لإيجاد الحل سنجري التحويل(تحويل لابلاس) من $f(t)$ إلى $F(s)$ حيث s متغير آخر لدالة التحويل وهو ناتج عن التحويل ويكون التحويل عن طريق إجراء التكامل التالي :

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \ : s > 0 \ \&\& \ t \geq 0$$

كما أننا نقول عن الدالة $f(t)$ أنها من مرتبة أسية إذا كان T كبير بشكل كافٍ حيث أن $t \geq T$ وكان بالإمكان إيجاد الثابتين $\alpha \ \&\& \ \mu$ يحققان العلاقة $|f(t)| < \mu e^{\alpha t}$

مبرهنة:

1) إذا كانت الدالة $f(t)$ مستمرة قطعياً على المجال $[0,\infty[$ وإذا كانت $f(t)$ من مرتبة أسية فإن تحويل لابلاس ل $f(t)$ موجود.
2) إذا كان تحويل لابلاس متقارباً بإطلاق من أجل $S = S_0$ عندئذ إن تحويل لابلاس متقارباً بإطلاق من أجل جميع قيم $S > S_0$

معلومة!!!!

دالة مستمرة قطعياً على مجال أي يوجد ضمن هذا المجال نقاط تكون الدالة غير مستمرة عند هذه النقاط

بعض الخواص لتحويل لابلاس:

$$A)\ L[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha F(s)+\beta G(s):\alpha,\beta\epsilon R\ \ \&\&S>0$$

تحويل لابلاس يحقق الخاصية الخطية

$$B)\ \ L[A]=\frac{A}{S}:A\in R\ \ \&\&\ S>0$$ وذلك حسب التعريف

مثال: أوجد تحويلا لابلاس للعدد الثابت

A) $\boldsymbol{f(t)=1}$

$$L[1]=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt=\int_0^{\infty} e^{-st}dt=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{s}[e^{-st}]_0^{\infty}=-\frac{1}{s}[0-1]=\frac{1}{s}$$

$$L[2]=\int_0^{\infty}2e^{-st}dt=2\int_0^{\infty}e^{-st}dt=\frac{2.1}{s}$$

أوجدناه في الأعلى

وهكذا $L[A]=\frac{A}{S}:A\in\mathbb{R}\ ,S>0$

$$C)l[e^{at}]=\frac{1}{S-a}\quad :\ S>0$$

$$D)\ L[\sin(at)]=\frac{a}{S^2+a^2}\ \ :S>0\ \ \&\&\ L[\cos(at)]=\frac{S}{S^2+a^2}:S>0$$

$$L[sh(at)]=\frac{a}{S^2-a^2}\ \ :\ S>a\ \ \&\&\ L[ch(at)]=\frac{S}{S^2-a^2}\ :S>a$$

$$L[t^n]=\frac{n!}{S^{n+1}}\ \ :\ \ n\in\mathbb{N}^*\ \ \&\&\ L[f'(t)]=SF(s)-f(a)\ \ :f'=\frac{df}{dt}$$

$$L[f''(t)]=S^2F(s)-Sf(a)-f'(a)\ \ \&\&\ L[\frac{\partial f}{\partial t}]=SF(x,s)-f(x,0)$$

$$L\left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right]=S^2F(x,s)-Sf(x,0)-f'(x,0)$$

ملاحظة: هنا ضفنا متغير جديد لأنه مشتق جزئي أي يوجد أكثر من متغير أحدهم s والآخر ليكن x

لأنه في حالة الاشتقاقات الجزئية يكون تعاملنا مع أكثر من متغير خلافاً عن الاشتقاق التام الذي يكون المتحول واحد.

$$L\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right] = \frac{\partial F(x,s)}{\partial x} \qquad \&\& \qquad L\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2 F(x,s)}{\partial x^2}$$

$$L[t^n f(t)] = \frac{(-1)^n d^n F(s)}{dS^n} \quad \&\& \quad L[e^{at}] = F(S-a) \quad : S > a$$

أما التحويل العكسي لتحويل لابلاس إذا كان $\boldsymbol{L[f(t)] = F(s)}$ **فإن** $\boldsymbol{L^{-1}[F(s)] = f(t)}$ **يدل على التحويل العكسي لتحويل لابلاس......**

صفحتنا على فيسبوك: IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/	مجموعة السنة الثانية : Improve Our Mathematics	مجموعة السنة الأولى: طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق 2017

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد شهلا – فادي الشريطي – مهيار طعمه