- ليكن V فضاء متجهاً من ما على الحقل F و
و ليكن $L: V \to V$ مؤثراً خطياً و $\lambda \in F$ قيمة
ذاتية تقابل متجهاً ذاتي $v \in V$ لا عنصر:

1. λ تقابل أكثر من متجه ذاتي واحد.
2. كل متجه ذاتي يقابل قيمة ذاتية وحيدة.

* البرهان (1)

نريد إثبات إذا كان لمتجه ذاتي فإن
av متجه ذاتي حيث $a \in F$
- ليكن $a \in F$ عنصر

نعلم أن $L(av) = aL(v)$

$L(av) = aL(v) = a(\lambda v) = \lambda(av)$

أي أن av متجه ذاتي

* البرهان (2)

نفرض أن v متجه ذاتي يقابل قيمتين ذاتيتين λ_1, λ_2

- لأن λ_1 قيمة ذاتية $L(v) = \lambda_1 v$ ... (1)
- لأن λ_2 قيمة ذاتية $L(v) = \lambda_2 v$ ... (2)

نطرح (2) من (1)

$0 = \lambda_1 v - \lambda_2 v$

$0 = (\lambda_1 - \lambda_2) v$

بما أن v متجه ذاتي $\neq 0$

$\lambda_1 = \lambda_2$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ غير صحيحة

Scanned by CamScanner

ملاحظة :

إذا كانت L تقطر بأن مصفوفتها بالنسبة للقاعدة
الذاتية هي مصفوفة قطرية وتكون من الشكل

$$H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

وهي المصفوفة القطرية التي يكون على عناصر
القطر الرئيسي هي القيم الذاتية λ_i

المصفوفة القطرية $= diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$

V فضاء شعاعي $B = \{V_1, V_2, \dots V_n\}$
هي الأساس V و λ_i $(i = 1, \dots n)$

$$L(V_1) = \lambda_1 V_1 + 0V_2 + \dots + 0V_n = \lambda_1 V_1$$
$$L(V_2) = 0V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + 0V_n = \lambda_2 V_2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$L(V_n) = 0V_1 + 0V_2 + \dots + \lambda_n V_n = \lambda_n V_n$$

$$H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

بالعودة للتمرين 1 الفقرة 2 نجد وصفاتها:

$P_L(X) = (X-2)(X-1)$

$\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 2$ هذه هي القيم

وهنا أن $B = (V_1, V_2, V_3)$ تأسيس لـ

$\mathbb{R}^3$ وبالتالي يكون L مقطورا ويكون مجموعة

المقطرية هي

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L(V_1) = 2V_1 + 0V_2 + \dots + 0V_n$

$L(V_2) = 0V_1 + 2V_2 + \dots + 0V_n$

$L(V_3) = 0V_1 + 0V_2 + 1V_3 + \dots + 0V_n$

* حساب قوى مصفوفة مربعة باستخدام تقطير مصفوفة

لتكن $A \in M_n(\mathbb{K})$ مصفوفة قطورة ولتكن A^k

بما أن A قطورة فإن مشابهة للمصفوفة قطرية

$H \in M_n(\mathbb{K})$ أي $A = S^{-1} H S$ حيث H قطرية

لنحسب A^k

$A^k = (S^{-1} H S)^k = (S^{-1} H S)(S^{-1} H S) \dots (S^{-1} H S)$

k مرة

$= S^{-1} H (S S^{-1}) H (S S^{-1}) \dots (S S^{-1}) H S$

$= S^{-1} H I H I \dots I H S$

$= S^{-1} H H \dots H S$

$= S^{-1} H^k S$

GHARAH

Scanned by CamScanner

$A' = (S^{-1} H S)'$

لتوضيح:

$= (S^{-1} H S)(S^{-1} H S)(S^{-1} H S)$

$= S^{-1} H (S S^{-1}) H (S S^{-1}) H S$

$= S^{-1} H I H I H S$

$= S^{-1} H H H S$

$= (S^{-1} H^3 S)$

ـ التمارين اذا كان L تظويراً وطلب حساب A^n

نطبق $A^n = S^{-1} H^n S$

حيث:

H مصفوفة L بالنسبة للقاعدة الثانية

(نظرية، وتأخذ نظرها ايضاً القيم الذاتية)

S مصفوفة الانتقال من القاعدة القانونية e إلى القاعدة الذاتية B

S^{-1} مصفوفة الانتقال من القاعدة الذاتية B إلى القاعدة القانونية e

مثال:

ليكن $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تطبيقاً خطياً:

$L(x,y,z) = (-11x+3y-3z, -6x+2y+6z, 5z)$

$\forall x,y,z \in \mathbb{R}^3$

2) أوجد القيم الذاتية ثم عين الفضاءات الذاتية المقابلة لكل

1- أوجد المعادلة المميزة وأوجد الجذور الموافقة لها

أوجد قاعدة ذاتية للتطبيق L إن أمكن

4. ناقش فيما إذا كان L قطورا أو لا.
وفي حال كان قطورا أوجد المعرفة القطرية.
5. احسب A^n حيث A معرفة L بالنسبة للقاعدة العادية.

سنقوم بحله في المحاضرة القادمة.

إعداد: ناريمان جتو
محمد أنس القزاز
تدقيق سيريا طب.

Scanned by CamScanner