حل تمرين المحاضرة السابقة :

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_1 - 4x_2 - 2x_3$$

الحل : حتى نحدد فيما إذا كان هذا التابع مقعّر أم محدب ندرس مصفوفة هيسيان لهذا التابع ، نبيّن إذا كانت معرّفة موجبة أو شبه معرّفة موجبة أو معرّفة سالبة أو شبه معرّفة سالبة .

نوجد المشتقات :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 6 \ , \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2 - 2x_1 - 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 - 2x_1 - 2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = -2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = -2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 4 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = -2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 0 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 2 .$$

$$\Rightarrow \quad H_f = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أنّ عناصر القطر الرئيسي جميعها أكبر تماماً من الصفر

نأخذ المحددات الصغرى الأساسية :

$$|6| > 0 \ , \ \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 4 = 20 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6(8) + 2(-4) - 2(8) = 48 - 8 - 16 = 24 > 0$$

إذاً المحددات الصغرى الأساسية الرئيسية أكبر تماماً من الصفر .

وعليه فإنّ مصفوفة هيسيان لهذا التابع هي مصفوفة معرّفة موجبة لأنها: ١. متناظرة
٢. عناصر القطر الرئيسي أكبر تماماً من الصفر
٣. المحددات الصغرى الأساسية الرئيسية أكبر تماماً من الصفر
بما أنّ مصفوفة هيسيان للتابع f معرّفة موجبة فإنّ هذا التابع هو تابع محدّب

* حل النماذج اللاخطيّة:

من أجل حل النماذج اللاخطية لدينا طرق عديدة تأخذ بعين الاعتبار جميع القيود الموضوعة على تابع الهدف سواء كانت قيود مساواة أو قيود متراجحات منها مشتقات تايلور، بحث القسمة الذهبي، بحث فيبوناتشي، مساقط التدرج والاهتزاز، ومضاريب لاغرانج.
تدرس مضاريب لاغرانج النماذج اللاخطية في حالتين:
1. إذا كان تابع هدف والقيد قيد مساواة.
2. " " " والقيد قيد متراجحات.
سندرس في المحاضرات القادمة نماذج لاخطية لقيود مساواة مستخدمين مضاريب لاغرانج لهذه الحالة.
وبشكل خاص إذا كان لدينا تابع هدف وقيد خطي أي إذا كان النموذج اللاخطي على الشكل التالي:

$$f(x) \longrightarrow Min$$

$$g(x) = b$$

حيث $f(x)$ تابع لاخطي و $g(x) = b$ فهو تابع خطي.

شرح موجز لطريقة مضاريب لاغرانج:

تتمثّل هذه الطريقة بتحويل النموذج الرياضي إلى مسألة إيجاد قيمة صغرى للتابع بدون قيود حيث ... لاغرانج بتشكيل تابع يُدعى بتابع لاغرانج من تابع الهدف في النموذج الرياضي والقيود على الشكل الآتي:

$$L(x, \lambda_i) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

حيث $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ شعاع حل و λ_i هي مضاريب لاغرانج عددها بعدد القيود.

اذاً تحولت المسألة الى مسألة غير مقيدة، ومن أجل تعيين القيمة الصغرى للتابع الجديد نقوم بإيجاد الأشقة الجزئية لنحصل على جملة ب $n+m$ معادلة في $n+m$ متحوّل (مجهول).

بحل هذه الجملة نحصل على قيم للمتحولات مقابلة لنقطة حدية، إما أن تكون عظمى أو أن تكون صغرى وذلك يتوقف على نوع تابع الهدف f لأن القيد خطي، وهو مقعر و محدب معاً.

من أجل تحديد ما إذا كان التابع f محدب أم مقعراً نقوم بإيجاد مصفوفة هيسيان لهذا التابع ونختبرها فيما إذا كانت معرّفة موجبة أو شبه معرّفة موجبة أو معرّفة سالبة أو شبه معرّفة سالبة، وذلك لتعيين نوع التابع، كما وضحنا في الدراسة السابقة.

لنوضح ما سبق من خلال الأمثلة التالية.

مثال:

باستخدام مضاريب لاغرانج أوجد القيمة الأصغرية للتابع:

$$f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1 + 2x_2 \to Min$$

مع مراعاة القيد:

$$2x_1 - x_2 = 4$$

الحل:

$$g(x) = 2x_1 - x_2 - 4 = 0$$

لنشكل تابع لاغرانج

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1 + 2x_2 - \lambda(2x_1 - x_2 - 4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 6x_1 + 2x_2 + 6 - 2\lambda$$

التاريخ / /

الموضوع

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 2x_1 + 2 + \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -2x_1 + x_2 + 4$$

نقوم بحل جملة المعادلات التالية:

$$6x_1 + 2x_2 + 6 - 2\lambda = 0$$
$$2x_2 + 2x_1 + 2 + \lambda = 0$$
$$-2x_1 + x_2 + 4 = 0$$

بحل جملة المعادلات مثلاً مشتركاً نحصل على:

$$x_1^* = \frac{7}{11} \quad , \quad x_2^* = \frac{-30}{11} \quad , \quad \lambda^* = \frac{24}{11}$$

وبالتالي عند النقطة $\left(\frac{7}{11}, \frac{-30}{11}\right)$ يحدد التابع قيمة قصوى، حيث أن النقطة $\left(\frac{7}{11}, \frac{-30}{11}\right)$ تحقق الشرط:

$$2x_1^* - x_2^* = 2\left(\frac{7}{11}\right) - \left(-\frac{30}{11}\right) = \frac{14}{11} + \frac{30}{11} = 4$$

نحدد فيما إذا كانت هذه القيمة عظمى أو صغرى.

بما أن القيد تابع خطي، فهو مقعر ومحدب بآن واحد، إذاً يتوقف نوع القيمة على طبيعة تابع الهدف، لنبحث فيما إذا كان محدب أو مقعر، ومن أجل ذلك نوجد المصفوفة الهيسيّة للتابع f.

بالحل نجد أن المصفوفة هي

$$H_f = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

من الواضح أن هذه المصفوفة متناظرة، وعناصر القطر الرئيسي موجبة تماماً.

$|6| > 0$ محدد المصفوفة الأساسية الرئيسية من المرتبة الأولى

$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$ " " " " الثانية

إذاً مصفوفة هيسيان مصفوفة معرّفة موجبة، وبالتالي فإن التابع تابع محدب

القيد محقق و التابع وصل إلى القيمة أصغرية .

بتعبير آخر يبلغ التابع $f(x)$ قيمة صغرى عند النقطة $\left(\frac{7}{11} , \frac{-30}{11}\right)$
قيمتها هي 3.54 ونحصل على هذه القيمة بالتعويض بالتابع f .

تمرين

1. أوجد القيمة الأصغرية للتابع :

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 + 2x_2 + 5$$

مع مراعاة القيد :

$$x_1 + x_2 = 6$$

2.

$$f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - 4$$

مع مراعاة القيد :

$$2x_1 - 3x_2 + 5 = 0$$

Marah

الموضوع المحاضرة التاسعة التاريخ 3 / 4 / 2017

نماذج المخزون : ندرس في المحاضرات القادمة نماذج المخزون و تحديداً" النماذج السكونية كتطبيق على النماذج اللاخطية ، فمن أجل ذلك لا بد من مقدمة وتعاريف للمخزون و إدارة المخزون نعتمد عليها في بناء النماذج

مقدمة :

تعتبر إدارة المخزون من أهم وظائف الإدارة وهي تلعب دوراً" كبيراً" في عمليات الإنتاج والتسويق وخاصة في المنشآت الإنتاجية و المؤسسات التجارية لأنّ هذه المنشآت و المؤسسات لا بد لها من أنْ يكون لديها مستودعات تحتفظ فيها بأدواتها ومعداتها و بضائعها المصنعة وشبه المصنعة .

لتأمين مخزون لتغطية حاجات السوق . والتخزين أنواع مختلفة وأهداف متعددة نذكر منها :

1. التخزين قطع الغيار لضمان استمرارية الإنتاج .
2. تخزين المواد لغرض الحماية من الأسعار .
3. تخزين المواد المناسبة في السوق .
4. تخزين الأدوية لتأمين حاجة السوق وخاصة في حالة الكوارث .
5. تخزين الأغذية لتأمين حاجة السكان
6. تخزين الدم لتأمينه في حالات الطوارئ و الضرورة .

من أجل هذا كله كان لابد من إعداد نماذج نحدد من خلالها حجم المخزون المثالي لأن المخزون كبير الحجم أو صغير الحجم قد يوقع المنشأة بخسائر كبيرة أهمها :

1. إن قيمة المخزون هي رأس مال مجمد و لا يستفاد منه خلال فترة التخزين إلا إذا ارتفعت الأسعار ، وبذلك تخسر المنشأة الفائدة المستحقة عليه
2. إذا كانت كمية المخزون كبيرة فإنّ فترة تسويقها كبيرة أيضاً وهذا ما يعرضها للتلف أو للعطب أو لانخفاض الأسعار وبذلك تتكبد المنشأة خسارة

كبيرة.

- إذا كانت كمية المخزون صغيرة جداً فإنّ ذلك قد يؤدي إلى اختناق في تأمين المواد الأولية للإنتاج وبالتالي إلى قصور في تأمين حاجة السوق في المواد الغذائية مما يؤدي إلى ارتفاع الأسعار.

3 إن حجم المخزون يتأثر بحجم الطلب عليه وبتكرار الطلبات في وحدة الزمن ولنوضح العلاقة بين حركة حجم المخزون مع الزمن.

* لنوضح العلاقة بين حركة حجم المخزون مع الزمن نقدم النماذج التالية فهي نماذج تبحث في معالجة وتحليل مواضيع إدارة المخزون:

1- النماذج السكونية للمخزون:
تنقسم إلى:
أ- النموذج السكوني دون قبول عجز في المخزون.
ب- النموذج السكوني مع قبول عجز في المخزون
ج- النموذج السكوني مع احتياطية الأمان.
د- نموذج الأسعار المتغيّرة.
هـ- النموذج السكوني لمدة مواد دون عجز.

2- النماذج الديناميكية للمخزون:
أ- نموذج التكاليف الخطية.
ب- نموذج التكاليف المنحنية.

3- النماذج العشوائية للمخزون:
أ- نموذج المدة الواحدة بمخزون ابتدائي.
ب- " " " " وتكلفة.
ج- نموذج المدتين.

الفرضيات الأساسية لنماذج المخزون

إنّ الفرضيات الأساسية لبناء نماذج المخزون تتلخص بما يلي:

1- حجم المخزون في بداية الزمن يساوي مقدار Q وهو ما سنبحث في تحديده

صالح.

٢) إنّ الطلب على المخزون مستمر وبمعدّل ثابت قدره λ خلال وحدة الزمن.

٣) عندما يبلغ حجم المخزون الصفر يتم تزويد المستودع فوراً بنفس الكمية.

٤) إنّ تكلفة إعداد الطلبية وإرسالها إلى المورّد تساوي في كل مرة مقداراً ثابتاً K وهو لا يتأثر بحجم الطلبية أو زمانها وتسمى تلك التكلفة بـ التكلفة الثابتة للطلبية.

٥) إنّ تكلفة شراء وإيصال واستلام وترتيب الطلبية Q يساوي C لكل واحدة منها ويبلغ إجمالي هذه التكلفة عند كل طلبية $Q.C$ وتسمى هذه التكلفة بـ التكلفة المتغيّرة للطلبيّة.

٦) إنّ تكلفة التخزين تساوي مقداراً "ثابتاً" H عند كل واحدة موجودة في المستودع خلال وحدة الزمن وتشمل تكلفة السيولة المجمدة وتكلفة المساحة المشغولة وتكلفة الحماية والأمن والتأمين والضرائب والرسوم المختلفة.

٧) إنّ تكلفة العجز الناتج عن نقص المخزون يساوي مقداراً "ثابتاً" عن كل واحدة غير موجودة في المستودع خلال واحدة الزمن.

في المحاضرات القادمة سنقوم بتحديد الكمية Q وهي الكمية التي يجب طلبها ووضعها في المستودع عند بداية كل فترة بحيث تكون التكلفة الإجمالية للتخزين في واحدة الزمن أصغر ما يمكن، حيث سنركز على ثلاثة نماذج سكونية:

١. النموذج السكوني دون عجز ولمادة واحدة.

٢. النموذج " مع " "

٣. " " لعدّة مواد دون عجز.

وضّاح