نظرية: لتكن x_0 نقطة شاذة نظامية ما للمعادلة التفاضلية $y''+py'+qy=0$ حيث (المترابطة)
ولتكن كلاً من r_1 و r_2 جذراً للمعادلة الأساسية

$Re\, r_1 \geq Re\, r_2$:

(a) إذا كان $r_1 - r_2$ ليس عدداً صحيحاً، عندئذٍ يوجد حلين مستقلين خطياً لهما الشكل:

$$(11)\quad y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r_1}, \quad a_0 \neq 0$$

$$(12)\quad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^{n+r_2}, \quad b_0 \neq 0$$

(b) إذا كان $r_1 = r_2$ عندئذٍ يوجد حلين مستقلين خطياً لهما الشكل:

$$(13)\quad y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r_1}, \quad a_0 \neq 0$$

$$(14)\quad y_2(x) = y_1(x) \ln(x-x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x-x_0)^{n+r_1}$$

(c) إذا كان $r_1 - r_2$ عدد صحيح موجب، عندئذٍ يوجد حلين مستقلين خطياً من الشكل:

$$(15)\quad y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r_1}, \quad a_0 \neq 0$$

$$(16)\quad y_2(x) = C\, y_1(x) \ln(x-x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^{n+r_2}, \quad b_0 \neq 0$$

حيث C ثابت يمكن أن يساوي الصفر من الارتباط الخطي بين r_2, r_1 $\quad r_2 = r_1 + C$

مثال: أوجد بعض الحدود الأولى من متسلسلة التمديد عند النقطة الشاذة النظامية $x=0$، لأجل الحلين المستقلين خطياً للمعادلة:

$$x^2 y''(x) - x y'(x) + (1-x) y(x) = 0, \quad x > 0$$

الحل: وجدنا سابقاً أن المعادلة الأساسية هي $r^2 - 2r + 1 = 0$
لها الجذران $r_1 = r_2 = 1$. بالعمل مع $r_1 = 1$ نحصل على متسلسلة الحلول التالية:

$$(18)\quad y_1(x) = x + x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{36}x^4 + \frac{1}{576}x^5 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} x^{k+1}$$

بالاستعانة بالمبرهنة السابقة نحصل على الحل $y_2(x)$:

$$(19)\quad y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1}$$

إن هدفنا هو إيجاد الثوابت b_n ، وذلك بتعويض $y_2(x)$ مباشرة في المعادلة(17)

$$y_2'(x) = y_1'(x)\ln x + x^{-1} y_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_n x^n$$

$$y_2''(x) = y_1''(x)\ln x - x^{-2} y_1(x) + 2x^{-1} y_1'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) b_n x^{n-1}$$

بتعويض $y_2(x)$ في (17) :

$$x^2\Big\{ y_1''(x)\ln x - x^{-2} y_1(x) + 2x^{-1} y_1'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) b_n x^{n-1} \Big\}$$
$$- x\Big\{ y_1'(x)\ln x + x^{-1} y_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1) b_n x^n \Big\} + (1-x)\Big\{ y_1(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1} \Big\} = 0$$

ومنه ،

$$\{x^2 y_1''(x) - x y_1'(x) + (1-x) y_1(x)\}\ln x - 2y_1(x) + 2x y_1'(x)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) b_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1) b_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} = 0$$

$$(22) \quad 2x y_1'(x) - 2y_1(x) + b_1 x^2 + \sum_{k=2}^{\infty}(k^2 b_k - b_{k-1}) x^{k+1} = 0$$

سنعوض $y_1(x)$ و $y_1'(x)$ في (22) وذلك لتعيين الأمثال ، وجدنا في (18) أن $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)}{k!} x^k$

ومنه ،

$$(23) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k+1)-2}{(k!)^2} x^{k+1} + b_1 x^2 + \sum_{k=2}^{\infty}(k^2 b_k - b_{k-1}) x^{k+1} = 0$$

$$(24) \quad (2+b_1)x^2 + \sum_{k=2}^{\infty}\Big[\frac{2k}{(k!)^2} + k^2 b_k - b_{k-1}\Big] x^{k+1} = 0$$

أن الحد x^2 لدينا $b_1 = -2 \Leftarrow 2+b_1 = 0$

مجموع الأمثال في (24) مساوية للصفر ، لدينا

ومن الحد x^{k+1} لدينا :

$$\frac{2k}{(k!)^2} + k^2 b_k - b_{k-1} = 0$$

أي

$$(25) \quad b_k = \frac{1}{k^2}\Big[b_{k-1} - \frac{2k}{(k!)^2}\Big] ;(k \geq 2)$$

لنأخذ $k=2$ و $k=3$ ونحسب b_2 و b_3 :

$$(26) \quad b_2 = \frac{1}{2^2}[b_1 - 1] = \frac{-3}{4} \quad , \quad b_3 = \frac{1}{9}\Big[\frac{-3}{4} - \frac{6}{36}\Big] = \frac{-11}{108}$$

مثال 2 :

(28) $xy''(x)+4y'(x)-xy(x)$, $x>0$

الحل: وجدنا $r^2+3r=0$ والتي لها جذران هما $r_1=0$, $r_2=-3$

بالعمل مع $r_1=0$ نحصل على متسلسلة الحلول:

(29) $$y_1(x)=1+\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{280}x^4+\dots$$

كما أن $r_1-r_2=3$ عدد صحيح موجب ، فإنه حسب المبرهنة السابقة فإن المعادلة (28) حل آخر مستقل خطياً له الصيغة:

(30) $$y_2(x)=c\,y_1(x)\ln x+\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-3}$$

بتعويض $y_2(x)$ في المعادلة (28) :

(31) $$x\Big\{c\,y_1''(x)\ln x+2cx^{-1}y_1'(x)-cx^{-2}y_1(x)+\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)(n-4)b_nx^{n-5}\Big\}$$
$$+4\Big\{c\,y_1'(x)\ln x+cx^{-1}y_1(x)+\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)b_nx^{n-4}\Big\}$$
$$-x\Big\{c\,y_1(x)\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-3}\Big\}=0$$

(32) $$\{xy_1''(x)+4y_1'(x)-xy_1(x)\}c\ln x+3cx^{-1}y_1(x)+2cy_1'(x)+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)(n-4)b_nx^{n-4}+\sum_{n=0}^{\infty}4(n-3)b_nx^{n-4}-\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-2}=0$$

(33) $$3cx^{-1}y_1(x)+2cy_1'(x)-2b_1x^{-3}+\sum_{k=2}^{\infty}[k(k-3)b_k-b_{k-2}]x^{k-4}=0$$

$$-2b_1x^{-3}+(-2b_2-b_0)x^{-2}+(3c-b_1)x^{-1}$$
$$+(18b_6-b_4)x^2+\left(\frac{11}{280}c+28b_7-b_5\right)x^3+(4b_4-b_2)+\left(\frac{7}{10}c+10b_5-b_3\right)x+\dots=0$$

$-2b_1=0\Rightarrow b_1=0$, $-2b_2-b_0=0\Rightarrow b_2=\frac{-1}{2}b_0$

$3c-b_1=0\Rightarrow c=\frac{1}{3}b_1=0$, $4b_4-b_2=0\Rightarrow b_4=\frac{1}{4}b_2=\frac{-1}{8}b_0$

$\frac{7}{10}c+10b_5-b_3=0\Rightarrow b_5=\frac{1}{10}b_3$

$18b_6-b_4=0\Rightarrow b_6=-\frac{1}{144}b_0$

$\frac{11}{280}c+28b_7-b_5=0\Rightarrow b_7=\dfrac{b_5-\frac{11}{280}c}{28}=\frac{1}{280}b_3$

(34) $y_2(x) = b_0\{x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-1} - \frac{1}{8}x - \frac{1}{144}x^3 + \dots\} + b_3\{1 + \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{280}x^4 + \dots\}$

(35) $y_2(x) = x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-1} - \frac{1}{8}x - \frac{1}{144}x^3 + \dots$

(36) $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad , x>0$

(37) $x y''(x) + 3y'(x) - x y(x) = 0 \quad , x>0$

مثال 3:

الحل: وجدنا أن $r^2+2r=0$ والذي جذراه هما $r_1=0$ و $r_2=-2$

باستعمال $r_1=0$ نحصل على: $y_1(x) = 1 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{192}x^4 + \frac{1}{9216}x^6 + \dots$

بما أن $r_1-r_2=2\in\mathbb{Z}^+$ فإنه وحسب المبرهنة يكون لدينا:

(39) $y_2(x) = c\, y_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-2}$

(40) $\{x y_1''(x) + 3y_1'(x) - x y_1(x)\}c\ln x + 2c x^{-1} y_1(x) + 2c y_1'(x)$
$+ \sum_{n=0}^{\infty}(n-2)(n-3)b_n x^{n-3} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n-2)b_n x^{n-3} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1} = 0$

(41) $2cx^{-1}y_1(x) + 2c y_1'(x) - b_1 x^{-2} + \sum_{k=2}^{\infty}[k(k-2)b_k - b_{k-2}]x^{k-3} = 0$

(42) $-b_1 x^{-2} + (2c - b_0)x^{-1} + (3b_3 - b_1) + (\frac{3}{4}c + 8b_5 - b_2)x$
$+ (15b_5 - b_3)x^2 + (\frac{5}{96}c + 24b_6 - b_4)x^3 + \dots = 0$

$$-b_1=0 \Rightarrow b_1=0$$

$$2c-b_0=0 \Rightarrow b_0=2c \qquad (c \text{ اختیاری})$$

$$3b_3-b_1=0 \Rightarrow b_3=\frac{1}{3}b_1=0$$

$$8b_4-b_2+\frac{3}{4}c=0 \Rightarrow b_4=\frac{b_2-\frac{3}{4}c}{8}=\frac{1}{8}b_2-\frac{3}{32}c \qquad (b_2 \text{ اختیاری})$$

$$15b_5-b_3=0 \Rightarrow b_5=\frac{1}{15}b_3=0$$

$$24b_6-b_4+\frac{5}{96}c=0 \Rightarrow b_6=\frac{b_4-\frac{5}{96}c}{24}=\frac{1}{192}b_2-\frac{7}{1152}c$$

(43) $$y_2(x)=c\left\{y_1(x)\ln x+2x^{-2}-\frac{3}{32}x^2-\frac{7}{1152}x^4+\dots\right\}$$
$$+b_2\left\{1+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{192}x^4+\dots\right\}$$

(44) $$y_2(x)=y_1(x)\ln x+2x^{-2}-\frac{3}{32}x^2-\frac{7}{1152}x^4+\dots$$