نظري

◄ دكتور المادة: ملك مارديني

◄ المحاضرة: التاسعة

◄ عنوان المحاضرة: الشروط الابتدائية للمعادلات التفاضلية

**المحتوى العلمي** : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

**1-سنتناول في محاضرتنا حل مسألة الشروط الابتدائية للمعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام تحويلات لابلاس**

**2-أمثلة عن ذلك**

---

لنبدأ ^_^

لتكن لدينا الدالة $z(x,t)$ التابعة للمتغيرين المستقلين $x,t$ فإننا نسمي :

$$\frac{\partial z}{\partial t},\frac{\partial^2 z}{\partial t^2},\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

بالمشتقات الجزئية للدالة $z$ بالنسبة ل $x,t$ (من المرتبة الأولى والثانية)بالنسبة لهذه المتغيرات بالمعادلة الجزئية.

**حل مسألة الشروط الابتدائية للمعادلة التفاضلية الجزئية باستخدام تحويلات لابلاس**

تعتمد على الخواص التالية:

1) خاصية المفاضلة الجزئية من المرتبة الأولى بالنسبة ل $t$:

$$L\left[\frac{\partial z}{\partial t}\right]=SZ(x,S)-z(x,0)$$

2) خاصية المفاضلة الجزئية من المرتبة الثانية بالنسبة ل $t$ :

$$L\left[\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right] = S^2 Z(x,S) - Sz(x,0) - z'(x,0)$$

3) خاصية المفاضلة بالنسبة ل $x$ من المرتبة الأولى:

$$L\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right] = \frac{\partial z(x,S)}{\partial x} = z'(x,S)$$

4) خاصية المفاضلة بالنسبة ل $x$ من المرتبة الثانية:

$$L\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2 Z(x,S)}{\partial x^2} = Z"(x,S)$$

**تمرين:** باستخدام تحويلات لابلاس أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial z}{\partial t} + x\frac{\partial z}{\partial x} = x : z(x,0) = z(0,t) = 0 \,\&\&\, x,t > 0$$

**الحل:** في البداية نأخذ تحويل لابلاس بالنسبة ل $t$ فإن أي متغير آخر يعتبر ثابت نخرجه خارج التحويل:

$$SZ(x,S) - z(x,0) - xZ'(x,S) = \frac{x}{S} \xRightarrow{\text{لدينا شروط البدء } z(x,0)=0}$$

$$xZ'(x,S) + SZ(x,S) = \frac{x}{S} \xRightarrow{\text{نقسم الطرفين على } x} Z'(x,S) + \frac{S}{x}Z(x,S) = \frac{1}{S}$$

وهي عبارة عن معادلة تفاضلية عادية من الشكل:

$$Z' + pZ = q : p = \frac{S}{x} \;\&\&\; q = \frac{1}{S}$$

ونعلم أن حلها العام من الشكل:

$$Z = e^{-\int p(x)dx}\left[\iint e^{\int p(x)dx}.q(x)dx + c\right] =$$

$$e^{-\int \frac{S}{x}dx}\left[\int e^{\int \frac{S}{x}dx}.\frac{1}{S}dx + c\right] = e^{-Slnx}\left[\int e^{Slnx}.\frac{1}{S}dx + c\right] =$$

$$Z = e^{\ln x^{-S}}\left[\int e^{\ln x^{S}}.\frac{1}{S}dx + c\right] = x^{-S}\left[\frac{x^{S+1}}{S(S+1)} + c\right] \rightarrow$$

$$Z = \frac{x}{S(S+1)} + \frac{c}{x^{S}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

لمعرفة قيمة الثابت $c$ نستخدم الشرط الابتدائي الثاني لدينا القانون:

$$Z(0,S) = \int_0^{\infty} z(0,t)e^{-St}dt = 0 \xRightarrow[]{\text{لأن } z(0,t)=0} Z(0,S) = 0 : x = 0 \text{عندما}$$

نعوض الآن في $(1)$ ومنه:

$$0 = \frac{0}{S(S+1)} + \frac{c}{0^{s}} \rightarrow c = 0 \rightarrow Z(x,S) = \frac{x}{S(S+1)}$$

الآن نفرق الكسر ثم نأخذ تحويل لابلاس العكسي بالنسبة ل $t$ ولكن كون $x$ يعتبر ثابت بالنسبة ل$t$ فإن:

$$L^{-1}[Z(x,S)] = xL^{-1}\left[\frac{1}{S(S+1)}\right] = xL^{-1}\left[\frac{A}{S} + \frac{B}{S+1}\right]$$

$$= xL^{-1}\left[\frac{AS + A + BS}{S(S+1)}\right] \rightarrow xL^{-1}\left[\frac{(A+B)S + A}{S(S+1)}\right] \xRightarrow[]{\text{بالمطابقة نجد أن}}$$

$$A + B = 0 \;\; \&\& A = 1 \rightarrow B = -1$$

$$L^{-1}[Z(x,S)] = xL^{-1}\left[\frac{1}{S}\right] + xL^{-1}\left[-\frac{1}{S+1}\right] = x - e^{-t}$$

**تمرين:** أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية باستخدام تحويلات لابلاس:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - k\sin(\pi x) : z(x,0) = z'(x,0) = 0$$

وَ $\quad z(0,t) = z(1,t) = 0$

**الحل :** لنأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة

$$L\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right] = \frac{1}{c^2} L\left[\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right] - k\sin(\pi x) L[1]$$

$$Z"(x,S) = \frac{1}{c^2}[S^2 Z(x,S) - \underbrace{Sz(x,0) - z'(x,0)}_{\boxed{\text{من شروط البدء معدومان}}}] - \frac{k}{S}\sin(\pi x)$$

$$Z'' = \frac{1}{C^2}[S^2 Z] - \frac{k}{S}\sin(\pi x) \Longrightarrow Z'' - \frac{S^2}{C^2} Z = -\frac{k}{S}\sin(\pi x) \dots\dots\dots (\$)$$

معادلة تفاضلية عادية غير متجانسة نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة:

$$Z" - \frac{S^2}{C^2} Z = 0 \xrightarrow{\text{المعادلة المميزة}} \lambda^2 - \frac{S^2}{C^2} = 0 \to \lambda^2 = \frac{S^2}{C^2}$$

$$\lambda_1 = \frac{S}{C} \;\&\&\; \lambda_2 = -\frac{S}{C} \xrightarrow{\text{والحل العام هو}} Z_1 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} =$$

$$C_1 e^{\frac{S}{C}x} + C_2 e^{-\frac{S}{C}x}$$

والآن نوجد حل خاص مع طرف ثان ونلاحظ أن الطرف الثاني من الشكل $A\sin(\pi x)$ وبالتالي فالحل الخاص هو $Z_2 = A\sin(\pi x)$ نوجد المشتقات :

$$Z_2' = A\pi\cos(\pi x) \;\&\&\; Z_2" = -A\pi^2\sin(\pi x) \xrightarrow{\text{نعوضهما في}(\$)}$$

$$-A\left(\pi^2 + \frac{S^2}{C^2}\right)\sin(\pi x) = -\frac{k}{S}\sin(\pi x) \to A\left(\frac{\pi^2 C^2 + S^2}{C^2}\right) = \frac{k}{S} \to$$

$$A=\frac{k}{S}.\frac{C^2}{S^2+\pi^2C^2}\xrightarrow{\text{نعوض }A\text{ في }Z_2}Z_2=\frac{kC^2}{S(S^2+\pi^2C^2)}\sin(\pi x)$$

والحل الأخير هو تركيب خطي للحلين $Z_1\&Z_2$ ومنه :

$$Z_1=C_1e^{\frac{S}{C}x}+C_2e^{-\frac{S}{C}x}+\frac{kC^2}{S(S^2+\pi^2C^2)}\sin(\pi x)$$

لمعرفة الثوابت $C_1\,\&\&\,C_2$ نستخدم الشروط الابتدائية:

$$Z(x,S)=\int_0^\infty z(x,t)e^{-St}dt\;\;\&\&\;Z(0,S)=\int_0^\infty z(0,t)e^{-St}dt=0$$

وبالتالي فإن $Z=0$ عندما $x=0$ نعوض في $Z$:

$$Z=C_1+C_2+0=0\rightarrow C_1=-C_2\ldots\ldots\ldots(\#)$$

نستخدم الشرط الابتدائي الثاني $z(1,t)=0$ ومنه :

$$Z(1,S)=\int_0^\infty z(1,t)e^{-St}dt=0\overset{\text{ومنه}}{\Rightarrow}x=1\text{ عندما }z=0$$

من(#) نجد: $C_1.e^{\frac{S}{C}}-C_2e^{-\frac{S}{c}}=0\rightarrow C_1e^{\frac{S}{C}}+C_1e^{-\frac{S}{C}}=0\rightarrow C_1=0\;\&\&\;C_2=0$

وبالتالي أصبحت $Z$ بالشكل : $\xrightarrow{\text{نفرق الكسر}}$ $Z=\frac{kC^2}{S(S^2+\pi^2C^2)}\sin(\pi x)$

$$\frac{1}{S(S^2+\pi^2C^2)}=\frac{A}{S}+\frac{BS+d}{S^2+\pi^2C^2}=\frac{AS^2+A\pi^2C^2+BS^2+dS}{S(S^2+\pi^2C^2)}=$$

$$\frac{(A+B)S^2-dS+A\pi^2C^2}{S(S^2+\pi^2C^2)}\rightarrow A\pi^2C^2=1\rightarrow A=\frac{1}{\pi^2C^2}\;\&\,d=0\&B=-A$$

نعوض في $Z$ ومنه:

$$Z = kC^2\sin(\pi x)\left(\frac{A}{S}+\frac{BS+d}{S^2+\pi^2C^2}\right) = kC^2\sin(\pi x)\left(\frac{1}{S}\cdot\frac{1}{\pi^2C^2}-\frac{1}{\pi^2C^2}\cdot\frac{S}{S^2+\pi^2C^2}\right)$$

$$=\frac{k}{\pi^2}\sin(\pi x)\left(\frac{1}{S}-\frac{S}{S^2+\pi^2C^2}\right)$$

حيث أخرجنا $\frac{1}{\pi^2C^2}$ عامل مشترك نأخذ الآن التحويل العكسي:

$$L^{-1}[Z(x,S)] = \sin(\pi x)\left[\frac{k}{\pi^2}-\frac{k}{\pi^2}\cos(\pi Ct)\right]$$

$$;\quad L^{-1}\left[\frac{S}{S^2+C^2\pi^2}\right] = \cos(\pi Ct)$$

ومنه :

$$z(x,t) = \frac{k}{\pi^2}\sin(\pi x).[1-\cos(\pi Ct)]$$

**انتهت المحاضرة**

---

| | | |
|---|---|---|
| صفحتنا على فيسبوك: IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/ | مجموعة السنة الثانية : Improve Our Mathematics | مجموعة السنة الأولى: طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق 2017 |

إعداد: محمد شهلا – فادي الشريطي – مهيار طعمه