المعادلات التفاضلية

نظري

◄ دكتور المادة: ملك ماارديني

◄المحاضرة الثامنة   عنوان المحاضرة: تحويلات لابلاس

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-سنتناول في محاضرتنا مجموعة من التمارين لتحويلات لابلاس التي ذكرناها سابقاً

أمثلة:

1) $L[2e^{-3t}+5t^2]=2L[e^{-3t}]+5L[t^2]=\frac{2}{S+3}+5\frac{2}{S^3}=\frac{2}{S+3}+\frac{10}{S^3}$

2) $L[2\cos(5t)]+L[6\sin(\pi t)]=2L[\cos(5t)]+6L[\sin(\pi t)]$

$=2\frac{S}{S^2+25}+6\frac{\pi}{S^2+\pi^2}$

3) $\mathrm{L}[\mathrm{te^t}]=F(S-a)=F(S-1)$: حيث هنا طبقنا

$$L[f(t)e^{at}]=F(S-a):f(t)=t$$

وكما أخذنا سابقاً $L[f(t)]=F(s)\ \ \&\&\ \ L[t]=F(s)=\frac{1!}{s^{1+1}}=\frac{1}{s^2}$

$$\Longrightarrow F(s-a)=\frac{1!}{(S-a)^{1+1}}=\frac{1}{(S-a)^2}\xRightarrow{\text{وهكذا نستنتج أن}}L[te^t]=\frac{1}{(S-1)^2}$$

يتوجب علينا حفظه كتحويل لابلاس شهير هو وتحويله العكسي الآتي:

$L^{-1}\left[\frac{1}{(S-a)^2}\right]=te^{at}$: نستخدمهم في حل المعادلات التفاضلية كتحويلات شهيرة

4) $L[t\sin(2t)]=(-1)^1\frac{dF(s)}{ds}\ldots\ldots\ldots.(\#)$: حيث $F(s)$ هو تحويل لابلاس للتابع

$$f(t)=\sin(2t)\ \&\&\ F(s)=L[\sin(2t)]=\frac{2}{S^2+4}\&\&\frac{dF(s)}{ds}=-\frac{4S}{(S^2+4)^2}$$

نعوض في (#) ومنه : $L[tsin(2t)] = \frac{4S}{(S^2+4)^2}$

طرق حل المعادلات التفاضلية باستخدام تحويلات لابلاس:

لكي نتمكن من حل المعادلة التفاضلية باستخدام تحويلات لابلاس يجب أن تكون مرفقة بمعطيات تساعدنا على الحل (الشروط الابتدائية) ولاستخدام الشروط الابتدائية نتبع مايلي:

نقوم بإجراء تحويل لابلاس لأطراف المعادلة التفاضلية سيكون الطرف الأيسر عبارة عن

$L[y] \,\&\, L[y']\&L[y"]$ حيث أن :

$$L[y"] = L[f"(t)] \,\&\&\, L[y'] = L[f'(t)] \,\&\&\, L[y] = L[f(t)]$$

ويكون الطرف الأيسر إما تحويل لابلاس لعدد ثابت أو تحويل لابلاس شهير.

بعد فك التحويل نحصل على معادلة تابعة ل $Y(s)$ نحاول اصلاحها بشكل يناسبنا لأخذ تحويل لابلاس العكسي فنحصل على حل المعادلة.

تذكرة:

$$L[y"] = S^2Y(s) - Sy(0) - y'(0)$$
$$L[y'] = SY(s) - y(0)$$
$$L[y] = Y(s)$$

تمرين: باستخدام تحويل لابلاس أوجد حل المعادلة التفاضلية $y" - 2y' + y = 4$

التي تحقق الشروط الابتدائية : $y'(0) = 2 \;\&\&\; y(0) = 4$

الحل: **نطبق الخطوات (التي تناولناها في الفقرة السابقة)**

نأخذ تحويل لابلاس لأطراف المعادلة :

$$L[y" - 2y' + y] = L[4] \xRightarrow{\text{وكون تحويل لابلاس يحقق الخاصة الخطية}} L[y"] - 2L[y'] + L[y] = L[4]$$

$$\underbrace{S^2Y(s) - Sy(0) - y'(0)}_{L[y"]} - 2\underbrace{\big(SY(s) - y(0)\big)}_{L[y']} + Y(s) = \frac{4}{s}$$

$$S^2Y(s) - Sy(0) - y'(0) - 2SY(s) + 2y(0) + Y(s) = \frac{4}{S}$$

نقوم بإصلاح المعادلة (نعوض القم الابتدائية وإخراج عامل مشترك إن وجد):

$$Y(s)[S^2-2S+1]-4S-2+8=\frac{4}{S}\to Y(s)(S-1)^2=4S-6+\frac{4}{S}$$

$$Y(s)(S-1)^2=\frac{4S^2-6S+4}{S}\to Y(s)=\frac{4S^2-6S+4}{S(S-1)^2}$$

وبالتالي يمكن تفريق الكسر السابق إلى ثلاثة كسور كما تعلمنا في مقرر تحليل (2) ^_^:

$$\frac{4S^2-6S+4}{S(S-1)^2}=\frac{A}{S}+\frac{B}{S-1}+\frac{C}{(S-1)^2}\quad \dots\dots\dots\dots(*)$$

نوحد المقامات ونطابق الكسرين ومنه :

$$\frac{A(S-1)^2+BS(S-1)+CS}{S(S-1)^2}=\frac{A(S^2-2S+1)+B(S^2-S)+CS}{S(S-1)^2}$$

$$=\frac{S^2(A+B)+S(-2A-B+C)+A}{S(S-1)^2}\xrightarrow{\text{نطابق أمثال } S^2 \text{ في الطرف الأيمن مع أمثال } S^2 \text{ في الطرف الأيسر}}$$

$$A+B=4\quad\dots\dots\dots(1)\ \ \&\&\ -2A-B+C=-6\dots\dots\dots(2)$$

$$A=4\dots\dots\dots(3)\xrightarrow{\text{نعوض}(3)\text{في}(1)}B=0\xrightarrow{\text{نعوض في }(3)\ A=4\ \&\ B=0}C=2$$

نعوض الثوابت في $(*)$ نجد $\frac{4S^2-6S+4}{S(S-1)^2}=\frac{4}{S}+0+\frac{2}{(S-1)^2}$

الخطوة الأخيرة نجري تحويل لابلاس العكسي للحصول على الحل :

$$L^{-1}[Y(s)]=4L^{-1}\left[\frac{1}{S}\right]+2L^{-1}\left[\frac{1}{(S-1)^2}\right]\ \&\&\ y(t)=4+2te^t$$

مثال آخر: حل المعادلة التفاضلية باستخدام تحويل لابلاس حيث:

$$y"+y=e^t$$

التي تحقق الشروط: $y'(0)=2\ ,\ y(0)=2$

الحل: نطبق الخطوات السابقة:

$$L[y"]+L[y]=L[e^t]$$

$$S^2Y9s0-Sy(0)-y'(0)+Y(s)=\frac{1}{s-1}$$

نخرج $Y(s)$ عامل مشترك ونعوض القيم $y'(0)=2\ \&\&\ y(0)=2$

$$[S^2+1]Y(s)=\frac{1}{s-1}+2\rightarrow Y(s)[S^2+1]=\frac{1+2s-2}{s-1}$$

$$Y(s)=\frac{2s-1}{(s-1)(s^2+1)}=\frac{A}{s-1}+\frac{Bs+C}{s^2+1}\ \dots\dots\dots\dots(\$)$$

نوحد المقامات ونطابق الكسور ومنه:

$$\frac{2s-1}{(s-1)(s^2+1)}=\frac{As^2+A+Bs^2-Bs+Cs-C}{(s-1)(s^2+1)}$$

$$\frac{2s-1}{(s-1)(s^2+1)}=\frac{s^2(A+B)+s(C-B)+A-C}{(s-1)(s^2+1)}$$

نلاحظ أن أمثال s^2 معدومة في الطرف الأيسر لذلك :

$$A+B=0\dots\dots\dots(1)\ \&\&\ C-B=2\dots\dots\dots(2)\ \&\&\ A-C=-1\dots\dots..(3)$$

نجمع (1) و (2) نجد: $A+C=2\dots\dots\dots(4)$ ومن (4) نجد أن $-C=A-2$

نعوض في (3) نجد أن: $A=\frac{1}{2}$ وبالتالي نجد أيضاً: $B=-\frac{1}{2}\ \&\&\ C=\frac{3}{2}$

نعوض في ($) الثوابت:

$$Y(s)=\frac{\frac{1}{2}}{s-1}+\frac{-\frac{1}{2}s+\frac{3}{2}}{s^2+1}=\frac{\frac{1}{2}}{s-1}+-\frac{\frac{1}{2}s}{s^2+1}+\frac{\frac{3}{2}}{s^2+1}$$

$$L^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]-\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]+\frac{3}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$y(t)=\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}\cos(t)+\frac{3}{2}\sin(t)$: وهو حل المعادلة التفاضلية

مثال: حل المعادلة التفاضلية $y"-5y'+6y=1$ التي تحقق الشروط الآتية:

$$y(0)=y'(0)=0$$

الحل :

$$L[y"]-5L[y']+6L[y]=L[1]$$

$$S^2Y(s) - Sy(0) - y'(0) - 5\big(SY(s) - y(0)\big) + 6Y(s) = \frac{1}{S}$$

نعوض القيم الابتدائية ونخرج $Y(s)$ عامل مشترك:

$$Y(s)[S^2 - 5S + 6] = \frac{1}{S} \to Y(s)(S-3)(S-2) = \frac{1}{S}$$

$$Y(s) = \frac{1}{S(S-2)(S-3)} = \frac{A}{S} + \frac{B}{S-2} + \frac{C}{S-3}$$

بتوحيد المقامات والمطابقة نحصل على: $A = \frac{1}{6}\,, B = -\frac{1}{2}\,, C = \frac{1}{3}$ نعوض في الكسور

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{6}}{S} - \frac{\frac{1}{2}}{S-2} + \frac{\frac{1}{2}}{S-3}$$

$$L^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{6}L^{-1}\left[\frac{1}{S}\right] - \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{S-2}\right] + \frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{S-3}\right]$$

وهو حل المعادلة التفاضلية: $y(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{3t}$

مثال: أوجد حل المعادلة التفاضلية $y'' + y' = te^t$ التي تحقق الشروط الابتدائية:

$$y(0) = y'(0) = 0$$

الحل:

$$L[y''] + L[y'] = L[te^t]$$

$$S^2Y(s) - Sy(0) - y'(0) + SY(s) - y(0) = \frac{1}{(S-1)^2}$$

وبتعويض القيم الابتدائية $S^2Y(s) + SY(s) = \frac{1}{(S-1)^2}$

نخرج $Y(s)$ عامل مشترك ومنه : $Y(s)[S^2 + S] = \frac{1}{(S-1)^2}$

$$Y(s) = \frac{1}{S(S+1)(S-1)^2} = \frac{A}{S} + \frac{B}{S+1} + \frac{C}{S-1} + \frac{D}{(S-1)^2}$$

بتوحيد المقامات والمطابقة نجد: $A = 1\,, B = \frac{1}{4}\,, C = -\frac{3}{4}\,, D = \frac{1}{2}$ نعوض في الكسور

$$Y(s)=\frac{1}{S}+\frac{\frac{1}{4}}{S+1}-\frac{\frac{3}{4}}{S-1}+\frac{\frac{1}{2}}{(S-1)^2}$$

$$L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{S}\right]+\frac{1}{4}L^{-1}\left[\frac{1}{S+1}\right]-\frac{3}{4}L^{-1}\left[\frac{1}{S-1}\right]+\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{(S-1)^2}\right]$$

وهو حل المعادلة التفاضلية: $y(t)=1+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{3}{4}e^{t}+\frac{1}{2}te^{t}$

مثال: أوجد حل المعادلة التفاضلية $y''+2y'+y=e^{-2t}$ التي تحقق الشروط الابتدائية:

$$y(0)=y'(0)=0$$

الحل:

$$L[y'']+2L[y']+L[y]=L[e^{-2t}]$$

$$S^2Y(s)-Sy(0)-y'(0)+2SY(s)-2y(0)+Y(s)=\frac{1}{S+2}$$

نعوض القيم الابتدائية : $S^2Y(s)+2Y(s)+Y(s)=\frac{1}{S+2}$

نخرج $Y(s)$ عامل مشترك : $Y(s)[S^2+2S+1]=\frac{1}{S+2}\to Y(s)(S+1)^2=\frac{1}{S+2}$

$$Y(s)=\frac{1}{(S+2)(S+1)^2}=\frac{A}{S+2}+\frac{B}{S+1}+\frac{C}{(S+2)^2}$$

بتوحيد المقامات والمطابقة نجد : $A=1\,,B=-1\,,C=1$ نعوض في الكسور

$$Y(s)=\frac{1}{S+2}-\frac{1}{S+1}+\frac{1}{(S+1)^2}$$

بأخذ التحويل العكسي:

$$L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{S+2}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{S+1}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{(S+1)^2}\right]$$

وهو حل المعادلة التفاضلية : $y(t)=e^{-2t}-e^{-t}+te^{-t}$

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد شهلا – فادي الشريطي – مهيار طعمه