نظري

◄ دكتور المادة: ريم الحاج خليفة

◄المحاضرة: العاشرة عنوان المحاضرة: تمارين

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- تمارين على المثاليات و التشاكلات .

تمارين :

١) برهن أن $\ker f = \{x : x \in \mathcal{R}, f(x) = 0\}$ مثالي في $\mathcal{R}$.

الحل : بما أن $f(0) = 0$ فإن $0 \in \ker f$ وبالتالي $kerf \neq \emptyset$ لإثبات أنه مثالي نأخذ عنصرين ينتميان إلى $\ker f$ وليكن $x, y \in kerf$ عندئذٍ :

١- $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0 - 0 = 0$ حسب تعريف $\ker f$

$\Leftarrow x - y \in \ker f$ وبالتالي الشرط الأول محقق .

٢- ليكن $r, t \in \mathcal{R}$ وَ $x \in \ker f$ عندئذٍ :

$f(r.x) = f(r).f(x) = 0 \Rightarrow r.x \in kerf$ حسب تعريف $kerf$.

ومن جهة ثانية

$f(x.t) = f(x).f(r) = 0 \Rightarrow x.r \in kerf$ حسب تعريف $kerf$.

الشرط الثاني محقق .

وبالتالي نجد أن $kerf$ مثالي في $\mathcal{R}$ أي أنه مثالي من اليمين ومن اليسار .

٢) ليكن لدينا $(S, T, *), (\mathcal{R}, +, .)$ حلقتين ما ولنرمز لصفر الحلقة $(S, T, *)$ بالرمز $0'$ وليكن التطبيق :

$$\varphi : \mathcal{R} \longrightarrow S$$

المعرف بالشكل : $\varphi(x) = 0' \quad : \quad \forall x \in \mathcal{R}$

برهن أن التطبيق φ هو تشاكل للحلقة $\mathcal{R}$ في الحلقة S .

الحل : لإثبات أنه تشاكل نأخذ عنصرين من الحلقة $\mathcal{R}$ تكون صورتهما (جمع و ضرب) وفق التطبيق φ هو مجموعهم وضربهم .

من أجل عنصرين $x, y \in \mathcal{R}$ فإن :

بما أن $0'$ هي من الحلقة $(S, T, *)$ فإن : $\varphi(x + y) = 0' = 0' \underbrace{T}_{\text{العملية المعرفة على } S} 0' = \varphi(x) T \varphi(y)$

$$\varphi(x.y) = 0' = 0' \underbrace{*}_{\text{العملية المعرفة على } S} 0' = \varphi(x) * \varphi(y)$$

الشرطين محققين $\Leftarrow$ φ تشاكل حلقي للحلقة $\mathcal{R}$.

٣) لتكن لدينا الحلقة $(\mathcal{R},+,.)$ ولنرمز للمحايد (عنصر الوحدة) بـِ 1 وليكن Δ_1,Δ_2 عمليتين ثنائيتين معرفتين على $\mathcal{R}$ في الشكل التالي :

$$\forall x,y\in\mathcal{R}\quad : x\Delta_1 y = x+y+1 \ , x\Delta_2 y = x+y+x.y$$

حيث التطبيق $\varphi: \underbrace{\mathcal{R}}_{\Delta_1,\Delta_2} \longrightarrow \underbrace{\mathcal{R}}_{+,\ .}$ المعرف بالشكل

$$\forall x\in\mathcal{R}\quad : \ \varphi(x) = x+1$$

المطلوب :

١- برهن أن φ تشاكل للحلقة $(\mathcal{R},\Delta_1,\Delta_2)$ على الحلقة $(\mathcal{R},+,.)$.

٢- برهن أن التطبيق φ هو متباين .

الحل :

١- $\forall x,y\in\mathcal{R}$

$$\varphi(x\Delta_1 y) = \varphi\left(\underbrace{(x+y)+1}_{\text{عوضنا}}\right) = x+y+1+1 = x+1+y+1 = \varphi(x)+\varphi(y)$$

$$\varphi(x\Delta_2 y) = \varphi(x+y+x.y) = x+y+x.y+1 = x+1+y+x.y$$

$$= x+1+y(1+x) = (x+1)(1+y) = \varphi(x).\varphi(y)$$

الشرطين محققين $\Leftarrow$ φ تشاكل حلقي للحلقة $(\mathcal{R},\Delta_1,\Delta_2)$.

٢- حتى يكون التطبيق φ متباين يجب أن يتحقق :

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\forall x_1,x_2 \in (\mathcal{R},+,.) \Rightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$$

$x_1+1 = x_2+1 \Rightarrow x_1 = x_2$ وبالتالي φ متباين .

٤) ليكن التطبيق $\varphi: \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{10}$ المعرف بالشكل

$$\forall x\in\mathbb{Z}_5\quad : \ \varphi(x) = 5x$$

بين فيما إذا كان التطبيق φ من الحلقة $(\mathbb{Z}_5,+,.)$ إلى الحلقة $(\mathbb{Z}_{10},+,.)$ تشاكل حلقي .

الحل : في هذا التمرين التطبيق φ لا يشكل تشاكلاً ولإثبات ذلك يكفي اعطاء مثال معاكس واحد .

ليكن $x,y\in\mathbb{Z}_5$ وسوف نفرض أن $x=2, y=4$

$$\varphi(x+y) = \varphi(2+4) = \varphi(1) = 5.1 = 5$$

ومن جهة أخرى نجد أن :

$$\varphi(x)+\varphi(y) = \varphi(2)+\varphi(4) = 5.2+5.4 = 10+20 = 30 = 0$$

وبالتالي نجد أن φ لا تشكل تشاكل حلقي لأن $\varphi(x+y)\neq\varphi(x)+\varphi(y)$

٥) لتكن لدينا الحلقة $(\mathcal{R},+,.)$ حلقة بمحايد بين أن التطبيق $\varphi:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathcal{R}$ المعرف بالشكل التالي $\varphi(n)=n.1\ :\ \forall n\in\mathbb{Z}$ هو تشاكل حلقي .

الحل: $\forall x,y\in\mathbb{Z}$ فإن :

$$\varphi(x+y)=(x+y).1=x.1+y.1=\varphi(x)+\varphi(y)$$
$$\varphi(x.y)=(x.y).1=(x.1).(y.1)=\varphi(x).\varphi(y)$$

وبالتالي φ تشاكل حلقي .

٦) إذا كانت الحلقة الجزئية $(S,+,.)$ من الحلقة $(\mathcal{M}_2(\mathcal{R}),+,.)$ والحلقة المعرفة بالشكل
$$S=\left\{\begin{bmatrix}x & y\\ 0 & x\end{bmatrix}:x,y\in\mathcal{R}\right\}$$
وليكن التطبيق المعرف بالشكل $\varphi\left(\begin{bmatrix}x & y\\ 0 & x\end{bmatrix}\right)=x:\forall x,y\in\mathcal{R}$
والمطلوب بين أن التطبيق φ تشاكل حلقي ثم حدد نواته .

الحل : (وظيفة) : لنعرف التطبيق $S:\longrightarrow\mathcal{R}$ بالشكل :

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}x & y\\ 0 & x\end{bmatrix}\right)=x:\forall x,y\in\mathcal{R}$$

$\forall\begin{bmatrix}x & y\\ 0 & x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}z & t\\ 0 & z\end{bmatrix}\in S\ :x,y,z,t\in\mathcal{R}$ فإن :

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}x & y\\ 0 & x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}z & t\\ 0 & z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x+z & y+t\\ 0 & x+z\end{bmatrix}=x+z=\varphi\left(\begin{bmatrix}x & y\\ 0 & x\end{bmatrix}\right)+\varphi\left(\begin{bmatrix}z & t\\ 0 & z\end{bmatrix}\right)$$
$$\varphi\left(\begin{bmatrix}x & y\\ 0 & x\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}z & t\\ 0 & z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x.z & x.t+y.z\\ 0 & x.z\end{bmatrix}=x.z=\varphi\left(\begin{bmatrix}x & y\\ 0 & x\end{bmatrix}\right).\varphi\left(\begin{bmatrix}z & t\\ 0 & z\end{bmatrix}\right)$$

وبالتالي φ تشاكل حلقي .

(إيجاد النواة) علينا ايجاد جميع العناصر التي نضعها في التطبيق φ وتعطينا الصفر وبالتالي حسب تعريف نواه تطبيق φ يكون لدينا :

$$\boldsymbol{ker}(\varphi)=\left\{\begin{bmatrix}x & y\\ 0 & x\end{bmatrix}:\ x=0\right\}=\left\{\begin{bmatrix}0 & y\\ 0 & 0\end{bmatrix}:\ y\in\mathcal{R}\right\}$$

مبرهنة : ليكن $n>1$ عدد صحيح عندئذٍ فإن القضايا التالية صحيحة :

١- $(a+b)mod-n=a\,mod-n+b\,mod-n$ وذلك $\forall a,b\in\mathbb{Z}$
٢- $(a.b)mod-n=(a\,mod-n).(b\,mod-n)$ وذلك $\forall a,b\in\mathbb{Z}$

" تقبل بدون برهان "

٧) ليكن $\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z}_{10}$ حلقتين إن التطبيق $\varphi:\mathbb{Z}_4\longrightarrow\mathbb{Z}_{10}$ المعرف بالشكل $\varphi(x)=5x=(5x\,mod-10)$ هو تشاكل حلقي .

الحل : $\forall x,y\in\mathbb{Z}_4$

$$\varphi(x+y) = 5(x+y) = 5(x+y)mod-10 = (5x+5y)mod-10$$
$$= \underbrace{(5x\ mod-10)+(5y\ mod-10)}_{\text{حسب المبرهنة السابقة}} = \varphi(x)+\varphi(y)$$

$$\varphi(x.y) = 5(x.y) = (5(x.y)mod-10) = \underbrace{(5\ mod-10).((x.y)mod-10)}_{\text{حسب المبرهنة السابقة}}$$

(حسب الضرب بالمقاس **10** فإن باقي قسمة 25 على 10 هو 5 أي $25 = 5$) وبالتالي

$$= (25mod-10)((x.y)mod-10) = [(5.5)(x.y)mod-10]$$
$$= (5x\ mod-10)(5y\ mod-10) = \varphi(x).\varphi(y)$$

$\Leftarrow$ φ تشاكل حلقي .

(ملاحظة في حل التمرين فرقنا الحل حسب المبرهنة السابقة ثم استخدمنا خاصية $25 = 5$ ومن ثم اعدنا تجميع الحدود ومن ثم فكها حسب المبرهنة وذلك لدقة الحل).

٨) ليكن $(\mathcal{R},+,.)$, $(S,T,*)$ حلقتين ولنرمز لصفري الحلقتين بالرمز $0', 0$ على الترتيب وإذا كان φ تشاكلاً للحلقة $(\mathcal{R},+,.)$ في الحلقة $(S,T,*)$ المطلوب :

برهن أن الصورة العكسية وفق φ لأي حلقة جزئية من الحلقة $(S,T,*)$ هي حلقة جزئية من $(\mathcal{R},+,.)$.

الحل : (وظيفة)

ليكن لدينا $(M,T,*)$حلقة جزئية من الحلقة $(S,T,*)$

إن $\varphi^{-1}(M)$ مجموعة جزئية من $\mathcal{R}$ وبما أن M حلقة جزئية من S فإن $0' \in M$ ومنه $\varphi(0) \in M$ أي أن $0 \in \varphi^{-1}(M)$ أي أن $\varphi^{-1}(M) \neq \emptyset$

ليكن $x,y \in \varphi^{-1}(M)$ وبالتالي $\varphi(x), \varphi(y) \in M$ **(سنطبق شرطي الحلقة الجزئية طرح عنصرين ينتمي وضرب عنصرين ينتمي ل $\mathcal{R}$)**

$$\varphi(x) \underbrace{T}_{S\text{ العملية المعرفة على }} (-\varphi(y)) = \varphi(x)T(\varphi(-y)) \underbrace{\in}_{S\text{ حلقة جزئية في } M\text{ لأن }} M$$

$$\Longrightarrow \varphi(x-y) \in M \Longrightarrow x-y \in \varphi^{-1}(M)$$
$$\varphi(x) * \varphi(y) = \varphi(x.y) \in M$$
$$\Longrightarrow x.y \in \varphi^{-1}(M)$$

نستنتج أن $(\varphi^{-1}(M),+,.)$ حلقة جزئية من الحلقة $(\mathcal{R},+,.)$

انتهت المحاضرة

إعداد: لبنى الطون – محمد فهمي القاضي – أحمد ابو التوت