التكاملات الجذرية:

الحالة الأولى:

$$\int f(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots)\, dx$$

نجري تغيير متحول

$$x = t^{S} \Rightarrow t = x^{\frac{1}{S}}$$

حيث S هو المضاعف المشترك الأصغر للمقامات $q_1, q_2, \ldots$

بالمضاعفات المشتركة أي المضاعف المشترك الأصغر لها

$$t = x^{\frac{1}{S}}$$

$$dx = S\, t^{S-1}\, dt$$

نعوض في التكامل

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}\, dx$$

$$= \int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}}\, dx$$

S المضاعف المشترك الأصغر $3, 2, 3$

$$S = 6$$

نفرض

$$x = t^6$$

$$dx = 6t^5\, dt$$

مثل بالمضاعفات الجذور بدلالة t

$$x^{\frac{1}{3}} = (t^6)^{\frac{1}{3}} = t^2$$

$$x^{\frac{2}{3}} = (t^6)^{\frac{2}{3}} = t^4$$

$$x^{\frac{1}{2}} = (t^6)^{\frac{1}{2}} = t^3$$

$$I = \int \frac{t^2}{t^4 - t^3}\, 6t^5\, dt$$

$$I = 6\int \frac{t^4}{t-1}\, dt$$

درجة البسط أكبر من درجة المقام نقسم

$$= 6\int \left(t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}\right) dt$$

$$= 6\left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1|\right] + C$$

$$I = 6\left[\frac{\sqrt[6]{x^4}}{4} + \frac{x^{\frac{3}{6}}}{3} + \frac{x^{\frac{2}{6}}}{2} + \sqrt[6]{x} + \ln|\sqrt[6]{x} - 1|\right] + C$$

الحالة الثانية: التكامل يحوي على x ذات الجذر بعلاقة من المرتبة الأولى بالنسبة لـ x

$$I = \int f(x)(ax+b)^{\frac{p_1}{q_1}}(ax+b)^{\frac{p_2}{q_2}} \ldots\, dx$$

S المضاعف المشترك الأصغر $q_1, q_2, \ldots$

$$ax + b = t^S$$

$$\Rightarrow x = \frac{t^S - b}{a}$$

$$dx = \frac{S}{a}\, t^{S-1}\, dt$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} + \sqrt{2x+1}}$$

$$= \int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}} + (2x+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$I = \int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$$

$$= \int \frac{dx}{x(1+2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}})}$$

$S = 6$

$x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5\,dt$

$x^{\frac{1}{2}} = t^3$

$x^{\frac{1}{3}} = t^2$

$$I = \int \frac{6t^5\,dt}{t^6(1+2t^3+t^2)}$$

$$= 6\int \frac{dt}{t(1+2t^3+t^2)}$$ درجة المقام أكبر حلل

$$I = 6\int \frac{dt}{t(t+1)(2t^2-t+1)}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2t^2-t+1 \\ \hline t+1 & 2t^3+t^2+1 \\ & \underline{2t^3+2t^2} \\ & -t^2+1 \\ & \underline{-t^2-t} \\ & t+1 \\ & \underline{t+1} \\ & 0 \end{array}$$

المضاعف المشترك الأصغر $2,3$

$S = 6$

نفرض

$2x+1 = t^6 \Rightarrow t = (2x+1)^{\frac{1}{6}}$

$x = \frac{t^6-1}{2}$

$dx = 3t^5\,dt$

$(2x+1)^{\frac{2}{3}} = (t^6)^{\frac{2}{3}} = t^4$

$(2x+1)^{\frac{1}{2}} = (t^6)^{\frac{1}{2}} = t^3$

$$I = \int \frac{3t^5\,dt}{t^4-t^3}$$ درجة البسط أكبر نقسم

$$= 3\int \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= 3\left[\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right] + C$$

$$= 3\left(\frac{(2x+1)^{\frac{2}{6}}}{2} - (2x+1)^{\frac{1}{6}}\right)$$

$$+ \ln\left|\sqrt[6]{2x+1}+1\right| + C$$

$I_1 = \frac{-9}{4}\ln|2t^2-t+1| - \frac{3.4}{8\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{t-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}\right)+C$

$I = 6\ln(x^{\frac{1}{6}}) - \frac{6}{4}\ln|x^{\frac{1}{6}}+1|$

$-\frac{9}{4}\ln|2x^{\frac{2}{6}} - x^{\frac{1}{6}}+1|$

$-\frac{12}{8\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{x^{\frac{1}{6}}-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}\right)+c$

$I_1 = \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$

$I_3 = \int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$

$I_4 = \int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}}\,dx$

تمرينات ع

إعداد الطالبة

رانيا رجب

$\frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{2t^2-t+1}$

$A=1 \quad B=-\frac{1}{4} \quad C=-\frac{3}{2}$

$D=\frac{1}{4}$

$I = 6\left(\int\frac{dt}{t} - \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+1} + \int\frac{-\frac{3}{2}t+\frac{1}{4}}{2t^2-t+1}\right)$

$= 6\ln t - \frac{6}{4}\ln|t+1| + I_1$

$I_1 = 6\int\frac{-\frac{3}{2}t+\frac{1}{4}}{2t^2-t+1} = \int\frac{-9t+\frac{6}{4}}{2t^2-t+1}\,dt$

مطلوب المشتقة ونضرب 4

$= \frac{-9}{4}\int\frac{4t-\frac{4}{6}-1-1}{2t^2-t+1}\,dt$ نعمل إكمال مربع

$= -\frac{9}{4}\int\frac{4t-1}{2t^2-t+1}\,dt - \frac{9}{4}\underbrace{\int\frac{\frac{1}{3}\,dt}{2t^2-t+1}}_{I_1}$

البسط مشتقة المقام

ln نكمل الى التكامل

$I_1 = -\frac{9}{4}\ln|2t^2-t+1| - \frac{3}{8}\int\frac{dt}{t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}}$

$= \frac{-9}{4}\ln|2t^2-t+1| - \frac{3}{8}\int\frac{dt}{(t-\frac{1}{4})^2+\frac{7}{16}}$