نظري

◄ دكتور المادة: هدى الشماط

◄ المحاضرة السادسة

عنوان المحاضرة: الدوال المستمرة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ الاستمرار المنتظم للدوال لعدة متغيرات

٢ـ التوابع المحدودة من الأدنى و من الأعلى و المحدودة

٣ـ نتائج هامة

٤ـ تمارين

تعريف الاستمرار بانتظام (المنتظم) :

نقول عن الدالة $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ بأنها مستمرة بانتظام على S إذا وفقط إذا تحقق الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0 \; ; \; \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x_1, x_2 \epsilon S \; : \; \|x_1 - x_2\| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

مثال :

لتكن $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = x^2$$

حل الدالة مستمرة بانتظام على المجال $[0.1]$

الحل :

$$\forall \varepsilon > 0 \; ; \; \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x_1, x_2 \epsilon [0.1] \; : \; \|x_1 - x_2\| < \delta$$

$$\Rightarrow |{x_1}^2 - {x_2}^2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |{x_1}^2 - {x_2}^2| = |x_1 - x_2||x_1 + x_2| < \delta |x_1 + x_2|$$

لكن

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le x_1 \le 1 \\ \\ 0 \le x_2 \le 1 \end{array}\right\} \quad x_1 + x_2 \le 2$$

ومنه نجد أن :

إذاً نختار $2\delta = \varepsilon$

$$|x_1{}^2 - x_2{}^2| < \delta|x_1 + x_2| \le 2\delta$$

$$\forall x_1, x_2 \in [0,1] \;\; : \; |x_1{}^2 - x_2{}^2| < \varepsilon$$

ومنه نجد أن f مستمرة بانتظام على المجال $[0,1]$

مثال : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = x^2$$

هل الدالة f مستمرة بانتظام على $\mathbb{R}$

الحل :

$$\forall \varepsilon > 0 \;, \varepsilon = \frac{1}{2} \;; \; \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \;:\; |x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |x_1{}^2 - x_2{}^2| < \varepsilon$$

لنأخذ مثلاً $x_1 = \frac{4-\delta^2}{4\delta}$, $x_2 = \frac{4+\delta^2}{4\delta}$ فيكون :

$$|x_1 - x_2| = \left|\frac{4-\delta^2}{4\delta} - \frac{4+\delta^2}{4\delta}\right| = \left|\frac{2\delta^2}{4\delta}\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

لكن $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1{}^2 - x_2{}^2| = \left|\left(\frac{4-\delta^2}{4\delta}\right)^2 - \left(\frac{4+\delta^2}{4\delta}\right)^2\right|$

$$= \left|\frac{16 - 8\delta^2 + \delta^4 - (16 + 8\delta^2 + \delta^4)}{16\delta}\right| = 1 \nless \frac{1}{2}$$

إذا الدالة ليست مستمرة بانتظام على المجال $\mathbb{R}$

تعريف: لتكن $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

١) نقول عن الدالة f أنها محدودة من الاعلى اذا كانت مجموعة قيمها $f(S)$ محدودة من الاعلى.

٢) نقول عن الدالة f أنها محدودة من الادنى اذا كانت مجموعة قيمها $f(S)$ محدودة من الادنى.

٣) نقول عن الدالة f أنها محدودة اذا كانت مجموعة قيمها $f(S)$ محدودة من الاعلى ومن الادنى.

ملاحظة:

إن $\sup f$ في حال وجودة هو عدد مثبت غير تابع لـ x، وقد يكون $\sup f$ هو قيمة لـ f أو قد لا يكون.(المقصود بأنه هو قيمة لـ f أي $(\exists x_0 \in S: f(x_0) = \sup f$

تذكرة: تعريف اصغر حدا اعلى لمجموعة محدودة (*supremum*)

نقول عن $b \in \mathbb{R}$ أنه أصغر حد أعلى $(b = \sup A)$ للمجموعة A إذا تحقق الشرطان:

$$1)\ \forall x \in A:\ \ x \leq b$$

$$2)\ \forall \varepsilon > 0:\ \ \exists z \in A\ ;\ z > b - \varepsilon$$

مبرهنة:

لتكن $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دالة **مستمرة** و S مجموعة **متراصّة** عندئذٍ:

١) الدالة f محدودة.

٢) تدرك الدالة f حدها الأعظمي وحدها الأصغري. (أي $\inf f , \sup f \in f(S)$)

نتائج:

١) تركيب دوال مستمرة بانتظام هو دالة مستمرة بانتظام.

٢) كل دالة مستمرة بانتظام هي دالة مستمرة نقطياً.

٣) كل دالة ليست مستمرة فهي ليست مستمرة بانتظام.

٤) كل دالة مستمرة على مجموعة متراصة هي مستمرة بانتظام.

مثال : ليكن $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ، إن المنطلق عبارة عن مجموعة مغلقة و محدودة و الدالة المعطاة هي كثيرة حدود ، أصبح لدينا دالة مستمرة على مجموعة متراصة ، فهي مستمرة بانتظام

تمرين:

ادرس استمرار الدالة f في النقطة $(0,0)$ حيث :

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2 + y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

الحل:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: ||(x,y)-(0,0)|| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$$

لدينا:

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x^4}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^4}{x^2+y^2} = \frac{x^2.x^2}{x^2+y^2}$$

$$\underset{(\text{حيث } x^2 \leq x^2+y^2)}{\leqq} \frac{x^2.(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = x^2 < x^2+y^2 < \delta^2$$

نختار $\delta^2 = \varepsilon$ ومنه:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \sqrt{\varepsilon} : ||(x,y)-(0,0)|| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$$

أي أن f مستمرة عند $(0,0)$.

تمرين:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & : (x,y) = (0,2) \\ \dfrac{[x^2+(y-2)^2+1]^{\frac{1}{2}} - 1}{x^2+(y-2)^2} & : (x,y) \neq (0,2) \end{cases}$$

أثبت حسب التعريف أن:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = \frac{1}{2}$$

الحل: نريد اثبات أن :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: 0 < ||(x,y)-(0,2)|| < \delta \Rightarrow \left|f(x,y) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

لنفرض أن $x^2+(y-2)^2 = a$ (لسهولة التعامل مع هذا المقدار) وبالتعويض بـ $f(x,y)$ نجد:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{a+1}-1}{a} \quad ; \quad (x,y) \neq (0,2)$$

كما نلاحظ أن $(0,2)$ نقطة حدية لـ f.

بالتعويض في $\left|f(x,y) - \frac{1}{2}\right|$ نجد أن :

$$\left|f(x,y) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{a+1}-1}{a} - \frac{1}{2}\right|$$

بتوحيد المقامات:

$$\left|f(x,y)-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2\sqrt{a+1}-2-a}{2a}\right|=\left|\frac{2\sqrt{a+1}-1-1-a}{2a}\right|$$

$$=\left|\frac{-(1+a)+2\sqrt{a+1}-1}{2a}\right|=\left|\frac{-\left(\sqrt{a+1}-1\right)^2}{2a}\right|$$

نضرب البسط والمقام بمرافق البسط $\left(\sqrt{a+1}+1\right)^2$ ومنه:

$$\left|f(x,y)-\frac{1}{2}\right|=\frac{(1+a-1)^2}{2a\left(\sqrt{a+1}+1\right)^2}=\frac{a^2}{2a\left(\sqrt{a+1}+1\right)^2}$$

$$=\frac{a}{2\left(\sqrt{a+1}+1\right)^2}<\frac{a}{2}<\frac{\delta^2}{2}=\varepsilon$$

نلاحظ أن $\frac{a}{2}<\frac{\delta^2}{2}$ لانه :

$$||(x,y)-(0,2)||=||(x-0,y-2)||=\sqrt{x^2+(y-2)^2}<\delta$$

$$\Rightarrow x^2+(y-2)^2<\delta^2$$

ونحن فرضنا سابقاً أن $x^2+(y-2)^2=a$ ومنه:

$$\left|f(x,y)-\frac{1}{2}\right|<\frac{a}{2}<\frac{\delta^2}{2}=\varepsilon$$

$$\Rightarrow\ \forall\,\varepsilon>0,\exists\delta=\sqrt{2\varepsilon}:0<||(x,y)-(0,2)||<\delta\Rightarrow\left|f(x,y)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

أي:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}f(x,y)=\frac{1}{2}$$

هل الدالة مستمرة عند $(0,2)$؟

لا لأن $(0,2)$ نقطة حدية قيمة الدالة عندها لا تساوي النهاية:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}f(x,y)=\frac{1}{2}\neq f(0,2)=0$$

تمرين:

لتكن

$$f,g:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$$

$$f(x)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}$$

$$g(x) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

أثبت أن :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x) = 0$$

بينما وضح أنه لا توجد للدالة $g(x)$ نهاية عند $(0,0)$

الحل:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: 0 < ||(x,y) - (0,0)|| < \delta \Rightarrow \left|(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\left|(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}\right| = |(x^2 + y^2)|.\left|\sin \frac{1}{xy}\right| \leq x^2 + y^2$$

نحن نعلم أن: $||(x,y) - (0,0)|| < \delta$

ومنه: $||(x,y)|| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow x^2 + y^2 < \delta^2$

وبالتالي:

$$\left|(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}\right| \leq x^2 + y^2 < \delta^2 = \varepsilon$$

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta = \sqrt{\varepsilon}: 0 < ||(x,y) - (0,0)|| < \delta \Rightarrow \left|(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} - 0\right| < \varepsilon$$

اذاً

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x) = 0$$

طريقة أخرى :

إن التابع $\sin \frac{1}{xy}$ تابع محدود (قيمه من المجال $[-1,1]$) و التابع $x^2 + y^2$ لا متناه في الصغر (يسعى إلى الصفر) عندما $(x,y) \to (0,0)$ و نعلم أن نهاية تابع محدود بلا متناه في الصغر هو لا متناه في الصغر (يسعى للصفر) إذاً

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x) = 0$$

والان لنثبت أنه لا يوجد نهاية للدالة g عند $(0,0)$

لنأخذ المتتالتين:

$$\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$\left\{\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

الان لنوجد صور المتتاليتين وفق الدالة g :

$$g\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{0}{\frac{2}{n^2}}=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=0$$

$$g\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n^2}}=\frac{3}{5} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{5}$$

في أغلب الأحيان لنفي وجود نهاية نحاول الاستعانة بالمتتاليات كما في مثالنا هذا

وبالتالي النهايتين مختلفتين (بالرغم من أن كلا المتتاليتين يسعى للنقطة $(0,0)$)
ومنه لا يوجد نهاية للدالة g في النقطة $(0,0)$.

تمرين:

لتكن الدالة $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4} & :(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & :(x,y)=(0,0)\end{cases}$ ، برهن أنها مستمرة على كل مستقيم مار من مبدأ الاحداثيات $(0,0)$ و لكنها غير مستمرة عند المبدأ بالذات

الحل : إن أي مستقيم مار من المبدأ له الشكل $y=\alpha x$ لنبدل في الدالة :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to0} f(x,\alpha x)=\lim_{x\to0}\frac{x(\alpha x)^2}{x^2+(\alpha x)^4}=\lim_{x\to0}\frac{\alpha x}{1+\alpha^2x^2}=0=f(0,0)$$

فهو مستمر على المستقيم $y=\alpha x$

- لنأخذ $x=y^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to0} f(y^2,y)=\lim_{y\to0}\frac{y^4}{2y^4}=\frac{1}{2}\neq0=f(0,0)$$

إذاً يوجد منحنٍ للسعي نحو المبدأ (هو القطع $x=y^2$) بحيث لا يتحقق الشرط $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$ فليس مستمراً عند المبدأ .

انتهت المحاضرة

صفحتنا على فيسبوك: IOM الرابط : facebook.com/MathemagicTeam/	مجموعة السنة الثانية : Improve Our Mathematics	مجموعة السنة الأولى: طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق ٢٠١٧

إعداد: منى شغل – سندس العص – نذير تيناوي