اللانهاية...إضاءة تاريخية

د. محمود باكير

اهتم الإنسان منذ القدم " باللامتناهي " لأسباب عديدة, قد يكون من أبرزها هو شعوره بضعفه الإنساني, لعدم قدرته على فهم سلوك الأعداد غير المنتهية, ولإخفاقه في " بلوغها ". لذلك شكّل هذا المفهوم تحدياً عقلياً كبيراً له. لهذا وضع أفلاطون (427ق.م -347ق.م) القضية التالية :" لا يوجد نهاية للأعداد الطبيعية ", أي لا يمكن الانتهاء من عدّها. وعلى الرغم من أن هذه حقيقة علمية, لا سبيل إلى إنكارها, بيد أنها تنم عن إقرار بنوع من العجز الإنساني. وربما هذا ما دفع الإنسان القديم إلى أن يضعها في مصاف " الغيبيات ". بيد أن اهتمام الرياضيين بها بدأ منذ عهد الرياضي الإغريقي زنون Zenon (عاش في القرن الخامس قبل الميلاد). ومنذ ذلك الحين و التفكير مستمر لتوضيح مفهوم " اللانهاية " على صعيد الرياضيات أولاً, ثم على صعيد علم اللاهوت فيما بعد. أو بمعنى آخر, مفهوم المنتهي, و غير المنتهي. لأنه على الرغم من أننا نعيش في عالم منته, بيد أن الرياضيات التي نحتاجها للتعامل معه بحاجة ماسة إلى اللانهاية. فمجموعة الأعداد الطبيعية غير منتهية, و عدد نقاط قطعة مستقيمة – مهما صغرت – غير منتهية. و لكي نحدد قيمة π بدقة يعوزنا عدد لا نهائي من الأعداد بعد الفاصلة, و الأمثلة على ذلك أكثر من أن تحصى, و ربما كان عددها لا نهائياً أيضاً!

و هذا المفهوم قد يختلط أحياناً على بعضهم, فيظن – مثلاً – أن مجموع عدد حبات الرمل في جميع شواطئ العالم عدد غير منته. فهو ليس كذلك طالما نستطيع عدّ الحبات, بغض النظر عن الزمن اللازم لذلك. في حين تكون المجموعة 1, 2, 3, 4, 5,... غير منتهية, لأنه مهما توغلّنا في هذه الأعداد فإن ثمة أعداداً أكبر. و قد تجنّب بعضهم استخدام مفهوم اللانهاية, غير أن الرياضيات التي تولّدت عن ذلك كانت غير مجدية, و نطاقها ضيق جداً. و قد بقي هذا المفهوم يستعصي على الفلاسفة, و الرياضيين, ردحاً من الزمن, إذ كانت كل المحاولات لبلورة نظرية شاملة, و دقيقة, تتعلق به تصطدم ببعض المتناقضات (المحيّرات) التي لا سبيل لتفاديها. لذلك لم تكن هذه الكلمة " المبهمة " تعني لمعظم الناس أكثر من شيء ضخم جداً, أو غير محدود, لا يمكن الإحاطة به.

و للتعرف على ضبابية هذا المفهوم و التناقض الذي كان ينطوي عليه, لنأخذ دائرتين لهما المركز نفسه, بحيث يكون محيط الكبرى يساوي ضعف محيط الصغرى. و لنرسم القطر cb من مركز الدائرة c. و لتكن a نقطة تقاطعه مع الدائرة الصغرى, و من ثم يكون cb و ca نصفي قطري الدائرتين الكبرى و الصغرى بالترتيب. لنقرن النقطة a من الدائرة الصغرى مع b من الدائرة الكبرى, ثم لنقرن بين كل نقطة من الدائرة الصغرى مع نظيرتها في الكبرى, و ذلك برسم أنصاف أقطار متعددة كالسابق. و على الرغم من أن محيط الدائرة الكبرى ضعف محيط الصغرى فرضاً, إلا أننا استطعنا أن نربط بين كل نقطة من الصغرى مع نقطة من الكبرى, و العكس صحيح أيضاً. لذلك يقول بعضهم بأن " عدد " نقاط محيط الكبرى هو نفس " عدد " نقاط محيط الصغرى (بغض النظر عن ماهية هذا العدد).

و لتوضيح الفكرة أكثر لنأخذ مجموعة الأعداد الطبيعية, و لنربط كل عدد بضعفه؛ وهو تقابل واحد إلى واحد بين مجموعة الأعداد الطبيعية و مجموعة الأعداد الزوجية. و تقابل واحد إلى واحد يعني قاعدة للربط بين مجموعتين بحيث يكون كل عنصر من الأولى يقابله عنصر واحد فقط من

الثانية, و العكس صحيح أيضاً. و على الرغم من أن الحدس يشير إلى أن المجموعة الأولى " ضعف " الثانية, إلا أننا نجد أن المجموعتين " متساويتان " في نهاية المطاف, بغض النظر عن طبيعة " التساوي " هذا. و التقابل :

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , ...

↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕

2 , 4 , 6 , 8 ,10, 12, ...

وما خلص إليه مفكرو العصور الوسطى, أمثال القديس توماس الأكويني St.T.Aquinas, حينما صادفوا مثل هذه الظواهر, أن الأعداد غير المنتهية تحمل في طياتها التناقض, و ذلك لعجزهم عن تفسير سلوكها. و أما غاليلو Galileo فقد ضمّن كتابه " الحوارات " (المنشور في هولندا عام 1638 م) حواراً بين ثلاثة أشخاص من عصر النهضة, حيث قابل أحدهم كل عدد بمربعه, ثم تساءلوا فيما إذا كانت المجموعة الثانية أصغر من الأولى؟

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ...

↕ ↕ ↕ ↕ ↕

1 , 4 , 9 ,16, 25 , ...

و ما خلص إليه غاليلو هو : أن كلاً من هاتين المجموعتين غير منتهية, و لا نستطيع استخدام علاقة التساوي, أو نفيها, في حالة المجموعات غير المنتهية, و إنما يقتصر استعمالها على المجموعات المنتهية فقط.

و السؤال الآن : لماذا نحتاج إلى الأعداد غير المنتهية؟ والجواب - ببساطة - نحتاجها للسبب نفسه الذي نحتاج فيه الأعداد المنتهية (الأعداد الطبيعية), لأن هذه الأخيرة تمكّننا من معرفة عدد عناصر مجموعة منتهية. لأن الأعداد الطبيعية عبارة عن تجريد للمجموعات المنتهية (إن كانت مجموعات رياضية أو غير ذلك). فمثلاً العدد خمسة هو ما تشترك به كل المجموعات المؤلفة من خمسة عناصر. في حين نحتاج لمعرفة عدد عناصر مجموعة غير منتهية إلى أعداد غير منتهية.

و في عام 1872 م نشر الرياضي الألماني ديد كند Dedekind (1831-1916) بحثاً عرّف فيه المجموعة غير المنتهية. و ينص تعريفه على أنه : نقول عن " نظام " إنه غير منته إذا كان يكافئ جزءاً فعلياً من نفسه, و في خلاف ذلك نقول إن النظام منته. و هذا التعريف يصاغ حالياً بلغة نظرية المجموعات على النحو التالي : تكون المجموعة غير منتهية إذا كان هناك تقابل واحد إلى واحد بينها و مجموعة جزئية تماماً منها.

و بعد ذلك بعام واحد اكتشف الرياضي جورج كانتور Cantor (1845- 1918) (ينحدر أصله من الدانمارك, وولد في روسيا, و قضى معظم حياته في ألمانيا) أنه يوجد تقابل واحد إلى واحد بين مجموعة الأعداد الطبيعية و مجموعة الأعداد العادية (الكسرية) الموجبة, على الرغم من أنه بين أي عددين طبيعيين متتاليين يوجد عدد لا نهائي من الكسور. و عبّر عن ذلك بقوله (مبرهنة) : " إن مجموعة الأعداد العادية الموجبة قابلة للعد "؛ بمعنى أنه, ببساطة, يوجد أعداد طبيعية بقدر ما يوجد أعداد عادية موجبة. و هذا يشير إلى أن مجموعة الأعداد الزوجية قابلة للعد أيضاً.

و في عام 1874 م نشر كانتور أكثر أبحاثه ثورية في الدورية العلمية Crelle's Journal, حيث بيّن أنه ليس فقط عدد الأعداد المنتهية (الطبيعية) غير منته, بل أيضاً بالمقابل فإن عدد الأعداد غير المنتهية هو غير منته. و هو بذلك أول من لاحظ تباين درجات اللانهاية, و اختلافها. و النتيجة المثيرة للدهشة في أعمال كانتور أن " البُعد " ليس له علاقة بعدد عناصر المجموعة (والأصح رياضياً: أن البُعد ليس له علاقة مع " قدرة مجموعة "), حيث إن " عدد " نقاط قطعة مستقيمة طولها واحدة الأطوال هو نفس " عدد " نقاط مربع مساحته واحدة المساحات, و هو نفس " عدد " نقاط مكعب حجمه واحدة الحجوم. و الأكثر من ذلك, فإن هذا " العدد " هو نفس " عدد " نقاط الفراغ الثلاثي بأكمله.

و قد لقي كانتور معارضة شديدة من بعض معاصريه من الرياضيين, و الفلاسفة, و أخفق في إقناعهم بصلاحية نتائجه. فقد كان بعضهم يطرح

مدى شرعية معالجة المجموعات غير المنتهية ككائنات محددة, كما أن بعض دارسي علم اللاهوت أبدوا قلقهم من أن يكون التحليل الرياضي للأعداد غير المنتهية, بصورة ما, شكلاً من أشكال التعرض للذات الإلهية. و انبرى كانتور للرد على معظم هذه الاعتراضات في مقال نشره عام 1885م؛ حيث ميز فيه بين ثلاثة أنواع من اللانهائيات. النوع الأول هو " اللانهاية المطلقة " Absolute Infinite , و هي لا نهاية علم اللاهوت, و النوع الثاني منها تتعلق بالعالم الفيزيائي : سلم الزمن اللانهائي, و عدد النجوم اللانهائي. و النوع الثالث ما يعنى به الرياضيون في دراستهم للمجموعات غير المنتهية, كمجموعة الأعداد الأولية, أو مجموعة نقاط مستقيم, أو غير ذلك. و نتائج كانتور هذه قادته إلى تأسيس " نظرية المجموعات " التي تغلغلت في رياضيات القرن العشرين, و على نحو خاص, في المنطق, و التبولوجيا, و التحليل. و منشأ ذلك أن الكائنات الرياضية لا تدرس ككائن فردي قائم بنفسه, بل كعناصر في مجموعة, أو تجمع يحوي عدداً لا نهائياً من الأشياء من النوع نفسه. لذلك أضحت الرياضيات الحديثة برمتها تصاغ بلغة نظرية المجموعات, كما أنها أصبحت المنطلق في دراسة الأساس الفلسفي, و المنطقي, للرياضيات. كما أرخت بظلالها على تدريس الرياضيات في العالم بدءاً من منتصف القرن العشرين. و على الرغم من أن ما قدمه كانتور كان علامة فارقة في المعرفة البشرية, و في الفكر الإنساني, و في غاية الأصالة, بيد أنه لم يحصل على مركز علمي مرموق يليق به. فقد أمضى معظم حياته الأكاديمية في جامعة ألمانية صغيرة, و متواضعة, قياساً بالجامعات الألمانية الأخرى. و كان طموحه أن يحصل على كرسي للتدريس في جامعة برلين, لكنه أخفق في ذلك. و كان ينحي باللائمة في هذا على الرياضي الألماني كرونيكر Kronecker (1823 - 1891). و يعزى سبب ذلك إلى التعارض بين آرائهما على المستوى الرياضي, حيث كان كرونيكر يؤمن بوجهة نظر فيثاغورث القديمة, التي تنص على " أنه يجب بناء الحساب والتحليل على الأعداد الطبيعية ", و حضّ على " ثورة حسابية " تحرّم استخدام الأعداد الصماء (الجذور) (مثل $\sqrt{3}, \sqrt{2}, ...$) مسوغاً ذلك بإنكار وجود مثل هذه الأعداد. و لم يكن كرونيكر حجر عثرة في دخول كانتور جامعة برلين فحسب, بل هاجمه مراراً, و حاول أن يقوّض فرع الرياضيات الذي عمل كانتور جاهداً على تأسيسه. و نتيجة لتفاعل الظروف الموضوعية التي أحاطت بكانتور مع ظروفه الذاتية التي تميزت بشخصية حساسة و مرهفة, قاده ذلك إلى انهيار عصبي في عام 1885م. و ما لبثت نوبات الكآبة والقنوط اللتين تنتابانه بين فينة و أخرى تدفعانه إلى أن يشكك في صحة عمله, على الرغم من أنه كان يتمتع بدعم بعض معارفه أمثال الرياضي هرميت Hermite. و استمرت أزمته النفسية حتى فارق الحياة في عام 1918 م في مدينة هيل الألمانية. و كانت حياته مأساة إنسانية مؤلمة, لم يكرّم, أو يُعترف بفضله, و أثره, إلاّ بعد رحيله, حيث كرّمه واحد من أعظم رياضيي النصف الأول من القرن العشرين, و هو الرياضي الألماني ديفيد هيلبرت Hilbert, حين وصف عمله : " بأنه من أكثر الأشياء دهشة مما أنتجه التفكير الرياضي, و واحد من أجمل إنجازات النشاط الإنساني في مجال القضايا سهلة التناول ... و أنه لن يطردنا أحد من الفردوس الذي أوجده لنا كانتور ".

و لكي نستطيع مواكبة كانتور في عمله لابد من بعض التعريفات البسيطة. نقول عن مجموعتين غير منتهيتين إن لهما " العدد الموغل " Transfinite number نفسه, إذا وجد تقابل واحد إلى واحد بين عناصرهما. و هذا يعرّف المساواة بين عددين موغلين لمجموعتين. و إذا وجد تقابل واحد إلى واحد بين مجموعة أولى X و مجموعة ثانية Z, التي هي عبارة عن مجموعة جزئية من مجموعة ما Y, و لا تساويها, نقول عندها إن Y تملك عدداً موغلاً أكبر من العدد الموغل للمجموعة X. و من ثم فإن مجموعة الأعداد الطبيعية, و مجموعة الأعداد العادية (الكسرية), و كذلك الأعداد الزوجية لها العدد الموغل نفسه. و قد رمز له كانتور بالرمز ℵ (وهو الحرف الأول من الأبجدية العبرية), و هو أول عدد لا نهائي.

و السؤال الأكثر أهمية هو : هل أي مجموعة غير منتهية قابلة للعد؟ أي أن لها " العدد الموغل " لمجموعة الأعداد الطبيعية. و في

رسالة وجهها كانتور إلى صديقه ديدكند في 7 ديسمبر (كانون أول) 1873 يعلمه فيها أنه اكتشف برهاناً على أن مجموعة الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد مع أنها غير منتهية, و هي بذلك تحوي عناصر " أكثر " من مجموعة الأعداد الطبيعية. و رمز لعدد عناصرها بالرمز C (وهو الحرف الأول من كلمة المتصل Continuum, و هي اسم آخر لمجموعة الأعداد الحقيقية). و هو عدد لا نهائي ثان عرفه كانتور. و العلاقة بين ℵ و C هي أن : $C = 2^{ℵ}$, أي أن " عدد " عناصر مجموعة المجموعات الجزئية لمجموعة الأعداد الطبيعية يساوي " عدد " عناصر مجموعة الأعداد الحقيقية (برهان ذلك في كتب التحليل الرياضي). و مجموعة المجموعات الجزئية لمجموعة ما تعني مجموعة أجزاء كل المجموعة بما فيها المجموعة الخالية, و المجموعة نفسها.

ثم استخدم كانتور أن عدد عناصر مجموعة المجموعات الجزئية لمجموعة ما أكبر من عدد عناصر المجموعة نفسها, ليصل إلى أن هناك عدداً موغلاً ثالثاً هو " عدد " عناصر مجموعة المجموعات الجزئية لمجموعة الأعداد الحقيقية, و عدداً موغلاً رابعاً هو " عدد " عناصر مجموعة المجموعات الجزئية للمجموعة الأخيرة, و هكذا دواليك. و منها خلص إلى أن عدد الأعداد غير المنتهية غير منته أيضاً. ثم بعد ذلك تساءل كانتور: إن كان يوجد عدد لا نهائي ما أكبر تماماً من ℵ و أصغر تماماً من C المذكورين آنفاً. فكانت إجابته بالنفي على ذلك, حيث اعتقد أن العدد اللانهائي الذي يلي مباشرة ℵ هو C, لكنه لم يستطع برهان ذلك. و عُرف هذا الاعتقاد في أدبيات الرياضيات بفرضية المتصل (المستمر The continuum-hypothesis) . و في عام 1963 برهن الرياضي بول كوهن P.Cohen أن هذه القضية لا يمكن البت فيها ضمن الإطار الحالي لنظرية المجموعات المبني على موضوعات زرمليو– فرانكلين.

ومن الجدير بالذكر أن " اللامنتهي " ليس شيئاً كبيراً, كما قد يظن بعضهم, بل هو شيء غير ذلك تماماً. كما يعتقد بعضهم أن المجموعة غير المنتهية تحوي كل شيء. بيد أن هذا الكلام غير صحيح إطلاقاً. فمثلاً ليس من الضروري أن تحوي أي مجموعة غير منتهية من الأعداد الطبيعية العدد 13. فنجد, على سبيل الذكر لا الحصر, أن مجموعة مضاعفات العدد 2 لا تحوي, مثلاً, العدد 13. كذلك الحال مضاعفات العدد 3, أو مضاعفات العدد 4,...و كل هذه المجموعات غير المنتهية لا تحوي العدد 13, باستثناء مجموعة مضاعفات العدد 13 نفسه.

كذلك ليس من الضروري أن تكون المجموعة غير المنتهية " كبيرة ", بل من الممكن أن تكون صغيرة. فإذا كان لدينا مجموعة عبارة عن قطعة مستقيمة طولها واحدة الأطوال (1 سنتمتر, مثلاً)، وقسمناها إلى جزئين، ثم تابعنا عملية القسمة تلك دون توقف, فإننا نحصل على عدد غير منته من القطع المستقيمة.

وتُستخدم المجموعات غير المنتهية في عديد من المجالات في الاختصاصات العلمية, ومن ضمنها الهندسة. ويستخدمها هؤلاء إلى حد ما, برضا وسرور لأنها فعالة. ولكنهم يعدّونها صندوقاً أسوداً, وفق تعبير الكاتب الإنكليزي براين كليغ Brain Clegg مؤلف كتاب " موجز تاريخ اللانهاية " A Brief History of Infinity , حيث نستخدمها ولا نعرف شيئاً عنها, كما هو الحال في استخدامنا للحاسوب.

الرياضيات والمسلمات..إضاءة تاريخية

د. محمود باكير

من المعروف أن الرياضيات – ببساطة – استنتاجات منطقية لقضايا جديدة من قضايا قديمة سبق إثباتها؛ وهكذا دواليك, إلى أن نصل إلى قضايا يُسَلّم بها وحدها دون برهان. بمعنى أنه ليس ثمة استدلال رياضي دون وجود معطيات أولية. ومن ثم لبناء أي " نظام رياضي ", أو " نظام منطقي ", لابد من وجود بداية, أو قاعدة, للانطلاق منها. وهذه البداية أضحت الآن (في الفكر الرياضي الحديث) تتألف من كلمات معينة, غير قابلة للتعريف تسمى اللامعرفات undefined terms، أو مفاهيم أولية primitive terms، ومن قضايا أولية, تسمى مسلمات، أو موضوعات، أو أحياناً تسمى اللامبرهنات. والمسلمة علاقة لا تستخرج من علاقة، أو من قضية proposition أخرى؛ أو بصياغة ثانية, هي بيان statement غير مثبت صحته.

وربما كان الفيلسوف الإغريقي أرسطو (384-322 ق.م)، الذي يعده المناطقة مؤسس علم المنطق، أول من أبدى انتباها لماهية المسلمات. فقد كان عنده حقائق أولية, أو أشياء للبدء بها. وهذه الحقائق نوعان : النوع الأول " أوليات " axioms، ومنها تُستنتج حقائق العلم. ومن الأوليات عنده الحدود, أي التعريفات. والنوع الثاني هو " المصادرات " postulates، ومنها يُثبت وجود أشياء العلم. والمصادرات لازمة – من وجهة نظره – لإثبات أن الشيء موجود في الطبيعة. فلا يكفي أن نصوغ للشيء التعريف المناسب إذا كان هذا الشيء غير موجود. بيد أن أشهر نظام رياضي ابتكره إقليدس بعد وقت قصير من أرسطو وارد في كتابه الأسطقسات Stoixia الذي سماه العرب كتاب " الأصول "، ويعرف بالإنكليزية باسم " The Elements of Euclid "[1]. فقد استهل المقالة الأولى بخمس أوليات عامة, أو بديهيات (الأشياء المساوية لشيء واحد متساوية،...، الكل أعظم من الجزء). كما عرّف النقطة, والخط ,والدائرة، فوجد لزاماً عليه أن " يصادر " على وجودها، فوضع المصادرات الخمس المعروف للهندسة الإقليدية[2]. و" المصادرة " كما يدل عليها جذرها (يصادر على, أو يطالب بـ = postulare) تعد " مطلباً " يتقدم به الرياضي لأن نسلّم له بالبداية (القضايا الأولية) للحصول على النتائج بعد سلسلة من المحاكمات المنطقية.

إن عمل إقليدس كان نقطة انعطاف في تاريخ الفكر الرياضي, على الرغم من أن التعاريف, والمصادرات, في كتابه المذكور, قد لا تلبي المتطلبات الحديثة من حيث الدقة, والصرامة. فقد تبين لاحقاً، وعلى خلاف ما قام به إقليدس، من أن " النقطة " و " المستقيم " كلمتان من اللامعرفات في الهندسة. وأكثر دقة, فإن ثمة ثلاث كلمات في الهندسة الإقليدية لا يمكن تعريفها. وهذه الكلمات هي نقطة, ومستقيم, ومتطابق congruent؛ أو هناك خيار آخر, " نقطة ", و" مستقيم ", و " بين " between. وأما بقية مفاهيم الهندسة فإنها تُعرّف باستخدام هذه الكلمات الأولية الثلاث.

وهذه النزعة قد تجذّرت في الفكر الرياضي الحديث, حيث يتم البحث, دوماً, في كل فرع من فروع الرياضيات البحتة عن اللامعرفات فيه، إضافة إلى موضوعاته (مسلماته). فقد أثبت الرياضي الإيطالي غيوزيب بيانو Giuseppe Peano (1858-1932)، مثلاً، أن نظرية الأعداد الطبيعية كلها يمكن أن تشتق من ثلاثة مفاهيم أولية (غير قابلة للتعريف), وخمس مسلمات, إضافة إلى قضايا المنطق. والمفاهيم الثلاثة الأولية هي الصفر, والعدد, والتالي. فمثلاً, تالي العدد صفر هو الواحد، وتالي الواحد هو اثنان، وهكذا دواليك.

وقد شغلت مشكلة وضوح البديهيات, أو الأوليات, حيزاً كبيراً من اهتمام الرياضيين, و الفلاسفة, قديماً، وأقضّت مضاجع كثيرين منهم. فما هو بديهي لشخص معين قد لا يكون بديهياً لشخص آخر. وإذا قلنا إن البديهي هو الذي يكون بديهياً لقطاع واسع من البشر، فإن تاريخ العلم حافل بالأمثلة عن " حقائق دامغة " كان يعتقد بها هؤلاء ثم تبين أنها غير صحيحة. من هذه الأمثلة عدم كروية الأرض، وأن مدارات الكواكب حول الشمس دائرية الشكل، والأجسام الثقيلة تسقط أسرع من تلك الخفيفة. و أكثر الناس مابرحوا إلى يومنا هذا يعتقدون أن لكل سطح وجهين، مع أن الرياضي الألماني موبيس A.F. Mobius (1790-1868) بيّن في عام 1858 م أن ثمة سطوحاً أحادية الوجه، لا وجود فيها لمفهومي " الداخل " و " الخارج ", أو " الوجه " و " القفا ". كما أن هناك سطوحاً أخرى مغلقة مثل " زجاجة كلاين ", نسبة إلى الرياضي الألماني كلاين F. Klein (1849-1925) ليس لها " داخل " أو " خارج "[3].

و البداية الفعلية لظهور إرهاصات التحول الكبير في الفكر الرياضي كانت في النصف الأول من القرن التاسع عشر الميلادي على يد الرياضيين بولياي J. Bolyai (1802-1860م), ولاباشيفسكي N. Lobachevski (1793-1856م) في عمليهما المتميزين الذي أصبح يطلق عليهما لاحقاً اسم " الطريقة الموضوعاتية " axiomatic method (نسبة إلى موضوعة) في البناء الرياضي. فكل واحد منهما أوجد,

على حدة, هندسته اللاإقليدية. وكان ذلك إيذاناً بالتحرر من السيطرة الإقليدية التي هيمنت على الفكر الهندسي ردحاً من الزمن دام نحو ألفي سنة. بل كان ذلك فتحاً علمياً أذن بولوج الفكر الرياضي في مرحلة جديدة. فقد استنتج لاباشيفسكي أن المصادرة الخامسة لإقليدس, التي تسمى مصادرة التوازي (من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم واحد فقط مواز له), مستقلة عن المصادرات الأربع الأخرى. فضلاً عن ذلك, فإنه من الممكن وضع مصادرة أخرى مغايرة تماماً لها، ومع ذلك تبقى البنية الكلية للمصادرات الخمس الجديدة متسقة (منسجمة) consistent. والمصادرة التي وضعها في بنائه الجديد هي : " من نقطة خارج مستقيم معطى، يوجد على الأقل مستقيمان يوازيان هذا المستقيم ". ثم جاء الرياضي الألماني جورج فريدريك ريمان Riemann (1826-1866)، وشكّل بناء هندسياً مختلفاً عن بناءي إقليدس, ولاباشيفسكي، ومصادرته تقول بأنه: " لا يوجد خط مستقيم يمكن رسمه من نقطة خارجة عن مستقيم معطى مواز لهذا المستقيم ". ونتج عن كل ذلك ما أضحى يطلق عليه الآن في الأدبيات الرياضية الهندسات اللاإقليدية.

هذا و لم يعد ثمة وجود لكلمة " بديهية " - بالمعنى الشائع لها - في الفكر الرياضي الحديث، بل إن هذه الكلمة أضحت عارية عن أي معنى من وجهة نظر الرياضيات الحديثة. كما أصبح من الصعب الآن الحكم على " صحة " مسلمات نظام رياضي؛ بل إن بعضهم يعد هذا السؤال, بحد ذاته, ليس له معنى. لأن أي نظام رياضي يبنى على مجموعة من المسلمات يعد مقبولاً إذا كان متسقاً (منسجماً) منطقياً؛ بمعنى أن لا تفضي هذه المسلمات إلى مبرهنة (نظرية) ونقيضها, في آن واحد. فلم يعد مطلوباً من المسلمات, أو من نتائج المبرهنات, أن تكون منسجمة مع مفهومنا الشخصي للحقيقة. فبعض المسلمات تبدو صحيحة, و بعضها غير ذلك, وبعضها الآخر يبدو أنه حتى من الصعب الحكم على صحتها, أو خطئها. والنظام الناشئ يعد نظاماً رياضياً مقبولاً, إذا كان متسقاً منطقياً. و هذا أفضى إلى أن " الانسجام ", أو " الاتساق ", وليس " الحقيقة ", هو الذي أضحى مفتاح الفكر الرياضي الحديث. بل إن المسلمات في الرياضيات الحديثة أضحت أبعد ما تكون عن الوضوح. والمهم جداً هنا هو أن يكون هذا النظام " مفيداً ". فالفوائد التي جنيناها من كل من هندسة إقليدس, ولاباشيفسكي, وريمان, لا يختلف عليهما اثنان، ولكن لكل نظام مجاله, وتطبيقاته[4]. ومع نهاية القرن التاسع عشر الميلادي, شرع الرياضيون في المطابقة بين الكلمات: " موضوعة ", و " مسلمة " axiom, و " فرضية " assumption , و " مصادرة ". وأصبحت تعد هذه الكلمات مترادفة رياضياً. ويعد عام 1936م هو لحظة الفصل في عملية المطابقة تلك حينما نشر بحثاً كان نقطة الانعطاف الكبيرة[5].

وقد برّر بعضهم طغيان كلمة (axiom) في الأدبيات الرياضية المعاصرة أكثر من كلمة (postulate) لسهولة الاشتقاق منها في اللغات الأوربية الحديثة من إنكليزية, وفرنسية, على خلاف الكلمة الثانية.

وصفوة الكلام أن أكثر العلوم موضوعية, ودقة, قامت على " التسليم " بمجموعة من المسلمات. وما تبقى يشتق من هذه المسلمات، أو بالأحرى يُستنتج منطقياً منها. وهذا ليس عيباً في النظام الرياضي، بل على العكس من ذلك, فإن هذا أهم ما يمتاز به عن غيره كعلم مبني منطقياً.

ومن الجدير بالذكر أنه لم يزل إلى يومنا هذا, في بلادنا, بعض دارسي الفلسفة من نصوصها المغرقة في القدم يميزون بين البديهية, والمسلمة, في الرياضيات, أو في فلسفتها. كما أنه لم يزل بعضهم من كتّاب العربية إلى الآن يترجم كلمة (axiom) بمعنى " بديهية ", بدلاً من " مسلمة ", أو " موضوعة "، وذلك نقلاً عن معاجم اللغة الإنكليزية – العربية, التي تترجمها على ذلك النحو. ومصدر هذه الترجمة, أساساً, هو ما أقره مجمع اللغة العربية في القاهرة, في الثلاثينيات من القرن العشرين, حينما ترجمها على ذلك النحو, وكان ذلك مبرراً في حينها. وقد آن الأوان للتوقف عن استخدام كلمة " بديهية "، على الأقل, في هذا الإطار، خاصة وأن معناها اللغوي لا يقارب المعنى المستخدم حالياً. ففي الصحاح (تجديد صحاح العلامة الجوهري) نجد في مادة بده : " البَداهة أول جري الفرس...وبادَهَهُ : فاجأه. والاسم البداهة والبديهة. وهما يتبادهان بالشعر، أي يتجاريان ". والبديهية (لغوياً) في المحيط (الفيروز أبادي) : " أولُ كل شيء وما يفجأ منه...ولك البديهية أي لك أن تبدأ ".

وطول الفترة التاريخية التي استغرقتها عملية النضوج اللغوية – الفكرية تلك، وإدراكها على نحو واضح, ومبلور, يعزى إلى طبيعة التجربة الفكرية المتعلقة بذلك. كما أنه مؤشر على الطبيعة المضنية لتلك التجربة التي استمرت حوالي ألفي سنة. يقول عالم النفس الأمريكي إريك فرومEric Fromm (1900-1980):" ينبغي أن نعلم أن كثيراً من التجارب لا تمنح نفسها بسهولة بحيث يتم تصورها في الإدراك "[6]. إن الأحاسيس المتعلقة ببقاء الفرد, أو الجماعة، كالجوع والخوف، يمكن تصورها على نحو واع وبسهولة، أما حين يتعلق الأمر بتجربة أكثر دقة, أو تعقيداً, فإن التجربة لا تصل إلى الإدراك في العادة, لأنها ليست مهمة بما يكفي لأن تجذب الانتباه[7].

ولن نعرّج على حقيقة مدلول القضايا الرياضية، فهي من المسائل الخلافية بين الفلاسفة؛ بل جُلّ ما نصبو إليه هو الإشارة إلى الطبيعة الموضوعاتية في بناء النظام الرياضي في الفكر الرياضي الحديث، وفاعليته في

إطار الرياضيات. وبما أن الرياضيات أساس كل العلوم التي تبحث عن الحقيقة, فإن تلك الطريقة مرشحة لأن تؤول إلى منهج عام لبناء التفكير المنطقي المترابط عند الإنسان. وهذا يذكّرنا بقول الرياضي البريطاني غودفري هارولد هاردي Hardy (1877-1947م) : " إن الرياضيات البحتة هي دراسة كيف يجب أن يفكر الناس لكي يحصلوا على نتائج صحيحة، وهي لا تأخذ في الحسبان الضعف الإنساني ".

و الطريقة الموضوعاتية ليست عيباً منطقياً, كما قد يظن بعضهم, بل إنها أضحت أداة فعالة في عديد من الحقول المعرفية؛ وأن اكتشافها كان نقطة انعطاف في الفكر الإنساني, و إغناء له, لما تستبطنه من صرامة فكرية. وخاصة إذا عرفنا أن ثمرة الصرامة هي الإبداع, وأول من أشار إلى ذلك الرياضي الألماني كارل فريدريك غاوس C.F.Gauss (1777- 1855). يقول رولان أمنيس :" وغاوس على أي حال جدير بكل تقدير, لأنه أعلن أن الصرامة هي أم الإبداع " [8].

الهوامش :

1- حققه د. أحمد سليم سعيدان تحت اسم " هندسة إقليدس في أيد عربية "، دار البشير (عمان)، 1411هـ = 1991م.

2- لمزيد من المعلومات انظر المرجع السابق.

3- انظر, مثلاً, " Mathematics :The New Golden Age",K. Devlin ,Penguin Books, 1988

4- لمزيد من المعلومات انظر للكاتب: " هل معنى البديهية بديهي؟ " في " دراسات لغوية من منظور رياضي ", الصفحة87, جامعة دمشق, 2015.

5- Univ. of New Mexico Bulletin,Philosophical Series, Vol. 1 ,No.2 , Oct.1, 1936

6- انظر مجلة المعرفة، وزارة الثقافة (سورية)، العدد 430 (1999)، الصفحة 116.

الفكر المنطقي عند جورج بول..

إضاءة تاريخية

د. محمود باكير

المنطق في اللغة هو الكلام, وعند الفلاسفة - وفق الشريف الجرجاني (740-816 هجري) في كتابه "التعريفات" - :" آلة قانونية تعصم مراعاتها الذهن من الخطأ في الفكر ". وبعض الفلاسفة يعرفه على أنه فن التفكير, وكان يقول عنه أبو سليمان المنطقي السجستاني (المتوفي 380هجري) " نحو عقلي ". وهو ضرورة لكل العلوم, بل هو آلة العلوم. و المنطق مستقر في نفس كل ذي لب, كما يقول ابن حزم الأندلسي (384 هـ - 456) في كتابه " التقريب لحد المنطق ".

و يقسم تاريخ المنطق عند بعضهم إلى ثلاث فترات : الفترة الكلاسيكية التي استمرت حوالي ألفي عام, وقد سيطر عليها فكر أرسطو (384- 322 ق.م) واضع أصول المنطق الصوري. ثم الفترة الرمزية التي بدأت مع الرياضي و المنطقي الإنكليزي جورج بول George Boole, و انتهت بالرياضي الألماني ديفيد هيلبرت David Hilbert (1862- 1943م). ثم الفترة الحديثة (الفترة الرياضية) التي بدأت مع أعمال الرياضيين و المنطقيين الإنكليزيين برتراند رسل Bertrand Russel (1872- 1970), ووايتهد A.N.Whitehead (1861 – 1947 م), و المستمرة حتى الآن. وبعضهم يعد هذه الفترة قد بدأت مع المنطقي النمساوي كورت غودل Kurt Godel (1906- 1978م). ومن ثم فإن المنطق الرياضي الحديث هو الصورة المتطورة عن المنطق الصوري كما ذكر رسل ووايتهد. و جورج بول هو صاحب مشروع تحويل التفكير المنطقي إلى نوع من أنواع الجبر. وكان هذا إيذاناً بولادة المنطق الرمزي, الذي يعد الحلقة الأساسية في تطور الفكر المنطقي في سياقه الرياضي. وكان جُلّ أمله من إعطاء المنطق هذا اللباس الجبري هو الصرامة و الدقة, وهما هاجس كل رياضي.

حياته

ولد بول في مدينة لنكولن Lincoln في انكلترا عام 1815م لوالد كان يعمل إسكافياً, ويظن أنه كان له إلمام بسيط في الرياضيات. وقد تلقى بول تعليماً بسيطاً في إحدى مدارس مدينته. بيد أنه سرعان ما ترك المدرسة لينصرف إلى التعلم الذاتي. وقد أبدى في مستهل حياته اهتماماً بدراسة الأدب, ثم تعلم اللغات اللاتينية, و اليونانية, و الفرنسية, و الألمانية, و الايطالية. و في السادسة عشرة من عمره بدأ حياته العلمية معلماً في إحدى مدارس مدينة دونكستر Doncaster. و بعيد ذلك بدأ التحول الكبير في حياته حيث انصرف إلى دراسة الرياضيات على نحو جدي. و شرع بدراسة أعمال الرياضي لابلاس P.S. Laplace (1749- 1827م), و الرياضي لاغرانج J.L. Lagrange(1736- 1813م). و خلال بضع سنوات بدأ يقدم الأبحاث الرياضية الأصيلة. وما انفك خلال تلك الفترة يراسل كبار الرياضيين المعاصرين. وقد استحوذ على اهتمامه بعض القضايا الخلافية في المنطق, والتي كان يشاطر بها صديقه الرياضي والمنطقي دي مورغان De Morgan (1806- 1871م). وكان قد طرح هذه القضايا على دي مورغان الفيلسوف الاسكتلندي

السير وليام هاملتون William Hamilton(1788- 1856). و هذا غير الرياضي الايرلندي السير وليام روان هاملتون William Rowen Hamilton(1805 – 1865م), فالأول كان بارونا, وورث اللقب عن أسرته, و الثاني كان رياضياً مرموقاً و حصل على اللقب بمآثره العلمية. ونتيجة لتلك الاهتمامات قام بول بنشر كتيب عام 1847 م بعنوان :" التحليل الرياضي للمنطق " The Mathematical Analysis of Logic الذي كان إرهاصاً لكتابه الثاني ذائع الصيت الموسوم بـ " قوانين الفكر ", و اسمه الكامل " بحث في قوانين الفكر " An Investigation of Laws of Thought الذي أصدره عام 1854م. و اعترف دي مورغان بأن هذا العمل سيكون فاتحة عصر جديد في مسيرة العلم. و في عام 1849 انتخب لكرسي الرياضيات في كوين كولج (Queens College) في مدينة كورك Cork في جنوب ايرلندا (الجمهورية الايرلندية حالياً), و أمضى فيها بقية حياته.

وقد سعى في كتابه " قوانين الفكر " إلى تجبير المنطق, وذلك من خلال معالجته على نحو شبيه لما يجري في الجبر. وقد ذكر في بداية الكتاب أن الهدف من هذه الدراسة هو تحري القوانين الأساسية للعمليات العقلية التي يتم بها الاستدلال. و أن تصاغ بلغة الحساب الرمزية. و على هذه الأسس سيشاد علم المنطق, و تنجز طرقه. و يعد هذا الكتاب أحد المآثر العظيمة في تاريخ الرياضيات, لأنه كان الحجر الأساس في بناء المنطق الرمزي, و في بزوغ جبر جديد أصبح يدعى فيما بعد جبر بول Boolean algebra, وكذلك جبر المنطق Algebra of Logic . وفي الأربعين من عمره تزوج بول من ماري إيفرست Mary Everest من مقاطعة ولز في بريطانيا صاحبة عديد من الدراسات التربوية. و تشغل أعمالها الكاملة أربعة مجلدات. حيث تطرقت في بداية هذه الأعمال إلى بعض مذكرات زوجها. فقد ذكرت أنه استغرق سبع سنوات في إنجاز كتابه " قوانين الفكر ", و قد تمنى لو أنه مكث خمس عشرة سنة في ذلك.

و في أواخر شهر تشرين الثاني (نوفمبر) عام 1864م توجه من منزله إلى كليته سيراً على الأقدام (و التي تبعد حوالي ثلاثة كيلو مترات) في جو ماطر و عاصف. و ألقى محاضرته بثيابه المبللة. فأدى ذلك إلى إصابته بالتهابات حادة. كما كان يعاني أصلاً من وهن شديد نتيجة انغماسه بعمله حيث كان دؤوباً, و مثابراً. و قد أدى ذلك إلى وفاته قبل أن يبلغ الخمسين من عمره.

بول و أدوات الربط المنطقية

إن معظم مناهج الرياضيات المعاصرة في الجامعات, و في المرحلة الثانوية, تتضمن مقدمة عن المنطق, حيث يعرض فيها " حساب القضايا " Propositional Calculus. و هو يدرس أدوات الربط المنطقية (و , أو, النفي, إذا كان... فإن, إذا و فقط إذا كان) و التي يطلق عليها أيضاً (الوصل, الفصل, النفي, الاقتضاء, التكافؤ أو ثنائي الاقتضاء). وقد اتضحت هذه الأدوات, و تبلورت, بل و شاع استخدامها على نطاق واسع, منذ عمل بول و غيره من مناطقة النصف الثاني من القرن التاسع عشر الميلادي.فقد أحكم بول السيطرة على ثلاث أدوات منطقية (من أصل خمس), و هي (و, أو, النفي).

و مما لاحظه بول أن حرف العطف (و) يشاطر عملية الجمع المألوفة (+) بعض خصائصها الصورية (الشكلية). فمن ذلك أن كلتيهما مستقلتان عن طبيعة الحدود التي يربط بينها. فمثلاً عبارة " الفرنسيون و الألمان " هي عين عبارة " الألمان و الفرنسيون ". و كذلك الأمر نفسه في الجبر, حيث أن $x + y = y + x$, من أجل أي عددين x, y. وهذا ما يطلق عليه بأن الجمع تبديلي, أو أنه يتصف بالخاصة التبديلية.

و بذلك يكون بول قد وضع من خلال تلك الأدوات الأساس النظري لتحويل العمليات الحسابية (الجمع, الضرب,...), و العمليات المنطقية (كمقارنة عددين ...) التي تطبق على الأعداد, إلى دارات كهربائية تستخدم في الحواسيب. لذلك فإن ثمة من يقول بأن بول واهب الحاسوب (الكمبيوتر) ملكة " العقل ".

الترميز عند بول

من المعروف أن المنطق عموماً كان يستخدم نوعاً من الرمزية, غير المحكمة, بل و ليست دقيقة. بيد أن بول أول من قام بمحاولة ترميز المنطق على نحو منهجي, و منظم, وفقاً لقواعد صارمة. فقد استخدم رموزاً مستقاة من الجبر للتعبير عن العمليات الفكرية. و تمخض عن ذلك منطق جديد. و بعضهم يعد أن ما قام به بول هو إيجاد جبر جديد يختلف عن الجبر العادي المألوف. فقد استخدم أحرفاً من الأبجدية (A, B, C,...) للدلالة على أي موضوع نحن بصدد دراسته, و أكثر دقة للدلالة على مجموعة جزئية من مجموعة من الأشياء (أعداد, نقاط, أفكار, أو أية كائنات أخرى مأخوذة من " مجموعة كلية "). و رمز للمجموعة الكلية بالرمز " 1 ", أي بالعدد واحد. و بعضهم يطلق عليها المجموعة الشاملة, أو الصف الكلي Universal Class. و افترض بول وجود مجموعة خالية, أو الصف الفارغ Null Class (و هي مجموعة لا تحوي أي عنصر من المجموعة الكلية), و رمز لها بالرمز " 0 ", أي الصفر. و قد انطلق بول, في ذلك, من مفهوم مفاده أن الواحد هو كل شيء. و أن الصفر لا شيء. فمثلاً, إذا نظرنا إلى الأوربيين على أنهم المجموعة الكلية (المجموعة التي قيد الدراسة), فإننا نرمز لها بالرمز 1. و لنفرض أن X ترمز للأوربيين الفرنسيين, و أن Y ترمز للأوربيين الرجال الذين اللذين يزيد عمرهم عن خمسين عاماً, و أن Z ترمز للأوربيين الذين يزيد طولهم عن 180سم. و استخدم بول الإشارة " + " بين حرفين, كما في X + Y للدلالة على اجتماع (اتحاد) المجموعتين الجزئيتين X , Y. و هي تعني عند بول, المجموعة المتشكلة من اجتماع عناصر X مع عناصر Y, على أن تستثنى العناصر المشتركة بينهما. و أصبح يطلق على هذه العملية الآن في الأدبيات الرياضية " الفرق التناظري " بين المجموعتين X, Y, و يرمز لها بالرمز X Δ Y . ولكن ثمة من يطلق عليها الجمع البولياني Boolean Sum. بينما استخدم دي مورغان مفهوماً للاجتماع يلزم بأخذ العناصر المشتركة بين المجموعتين. و جبر بول الحديث, المتداول حالياً يأخذ الاشارة " + " لتعني مفهوماً للاجتماع كما عرّفه دي مورغان.

كما استخدم بول إشارة الضرب " x " بين مجموعتين للدلالة على تقاطع هاتين المجموعتين, حيث نكتب XxY , كما تكتب أيضاً على النحو (X .Y), أو (YX). وهي – تعريفاً – مجموعة العناصر المشتركة بينهما. و تسمى هذه العملية أحياناً بالضرب المنطقي. و في المثال المذكور آنفاً إن YX تمثل مجموعة الفرنسيين الرجال الذين يزيد عمرهم عن خمسين عاماً. و قد عبّر عن الهوية بعلامة التساوي (=), حيث استخدم هذه الإشارة للدلالة على علاقة التطابق بين مجموعتين جزئيتين, للدلالة على أن لهما العناصر ذاتها.

تعريف الحلقة RING

إن أفضل السبل لدراسة منطق بول الرمزي هو باستخدام إحدى البنى الأساسية في الجبر المجرد (الجبر الحديث), وهي " الحلقة ". و مفهوم الحلقة متضمن في بعض أعمال رياضيي القرن التاسع عشر الميلادي.

بيد أنه لم يعترف عليه كمفهوم رياضي ذي كيان مبلور إلا في القرن العشرين. و البنية الجبرية – ببساطة – هي مجموعة معرف عليها عملية رياضية, أو أكثر, و تحقق شروطاً معينة.

لنأخذ مجموعة الأعداد الصحيحة (الموجبة و السالبة), التي يصادفها الدارس في بداية الجبر العادي, (.......,7 ,6 ,5 , 4 , 3 , 2 ,1 ,0 , 1- ,2- , 3- , 4- , 5- , 6- , 7- , ...). و لنفرض أن X و Y ترمزان لأي عددين صحيحين, بما في ذلك احتمال تساويهما. إن X+ Y يمثل حاصل جمعهما, و X x Y يمثل حاصل جداؤهما (على النحو المألوف). إن الكائن الناتج عن هاتين العمليتين (الجمع و الضرب) ينتمي إلى المجموعة ذاتها, لأن حاصل جمع عددين صحيحين هو عدد صحيح, و حاصل جداء عددين صحيحين هو عدد صحيح. لذلك يقال إن مجموعة الأعداد الصحيحة " مغلقة " بالنسبة للجمع, و الضرب. و هاتان العمليتان تحققان القواعد التالية ضمن هذا الإطار :

X + Y = Y + X (الخاصة التبديلية بالنسبة للجمع)

(X + Y) + Z = X + (Y + Z) (الخاصة التجميعية بالنسبة للجمع)

(X x Y) x Z = X x (Y x Z) (الخاصة التجميعية بالنسبة للضرب)

(X + Y) x Z = (X x Z) + (Y x Z) (توزيع الضرب على الجمع من اليسار)

Z x (X +Y) = (Z x X) + (Z x Y) (توزيع الضرب على الجمع من اليمين)

و من أجل أي عددين Y و Z فإن ثمة عدداً X في هذه المجموعة بحيث أن X + Y = Z, وهو ما يمكن أن نطلق عليه " قانون الطرح ". و هذا القانون لا يشير إلى وحدانية العدد X, ولكن يمكن البرهان على ذلك انطلاقاً منه, ومن غيره من القوانين التي تتعلق بالجمع. و نشير عادة إلى العدد X بالرمز Z - Y.

و الآن إذا كان لدينا مجموعة من الأشياء, و كانت المجموعة مغلقة بالنسبة لعمليتين افتراضيتين يمكن أن يرمز لهما " + " و " x ", و كانتا تحققان القوانين المذكورة آنفاً, فإننا نسمي هذه المنظومة (المجموعة مع العمليتين) " حلقة ". و نسمي هاتين العمليتين " بالجمع ", و " الضرب ", بالترتيب, وذلك لتشابههما بالصورة مع عمليتي الجمع و الضرب في الحساب.

و مجموعة الأعداد الصحيحة (مع عمليتي الجمع و الضرب المألوفتين) تعد أوضح مثال عن الحلقة, كذلك مجموعة الأعداد العادية (الكسرية). كما أن ثمة أمثلة أخرى عديدة. ومن الشائع أن نكتب X x Y على النحو X Y, لذلك فإن X x X تكتب X^2 (و تقرأ : X مربع, أو X مرفوعة للقوة اثنين). و إذا تحقق في حلقة ما أن X^2 = X من أجل أي X (خاصة اللانمو), إضافة إلى أن فيها عنصراً حيادياً (بالنسبة لعملية الضرب), أي أن ثمة عنصراً " 1 " بحيث أن X x 1 = X = 1 x X, من أجل كل X, فإنها تسمى حلقة بوليانية Boolean Ring. وهذه الأخيرة بالضرورة تبديلية.

ومن الممكن الحصول على حلقة بوليانية بأخذ جميع المجموعات الجزئية لمجموعة ما؛ أي بتشكيل مجموعة عناصرها عبارة عن مجموعات جزئية (أجزاء) من مجموعة ما معطاة. و يمكن التعبير – في هذه الحلقة – عن قولنا إن X مجموعة جزئية من Y (أو X محتواة في Y) بكتابة المعادلة X = X Y. و يمكن توضيح ذلك إذا عرفنا أن X Y في هذا السياق تمثل تقاطع المجموعتين X و Y (أي مجموعة العناصر المشتركة بينهما). ومن ثم فإن X محتواة في Y إذا كان حاصل تقاطعهما هو عين X. وهذا يعبر عنه بالرموز الحديثة المتداولة حالياً في نظرية المجموعات, على النحو : $X \subseteq Y$ يكافئ $X \cap Y = X$.

ومن الجدير بالذكر أن X^2 = X صحيحة في الجبر العادي – حصراً – عندما تكون قيمة X تساوي الصفر, أو الواحد. بينما هذه المعادلة محققة دوماً في أية حلقة بوليانية كونها شرطاً لوجود الحلقة.

و هذه إحدى أوجه الخلاف بين الحلقة البوليانية و جبر المنطق من جهة أولى, و الجبر العادي من جهة ثانية, لأن ثمة خلافات أخرى. فمثلاً إذا كان $ZX = YX$ (حيث أن X ليست المجموعة الخالية) فإن هذا لا يقتضي أن $Z = Y$, و هذا خلاف الجبر العادي الذي نستطيع فيه اختزال X من الطرفين طالما أنها لا تساوي الصفر.

و من المعروف في الجبر العادي أنه إذا كان حاصل جداء عددين يساوي الصفر فإنه لابد أن يكون أحدهما على الأقل يساوي الصفر. و هذا غير صحيح في جبر المنطق. وتوضيحاً لذلك لنفرض لدينا مجموعتان X و Y بحيث أن $X\,Y = 0$ (أي أن تقاطعهما خالٍ, لأن الصفر عند بول يمثل المجموعة الخالية), و من ثم لا يوجد أي عنصر مشترك بينهما مع أن كلاً من المجموعتين ليست خالية.

و قد كان بول يعد نفي X هو $1 - X$ (الواحد مطروحاً منه X). و لتوضيح ذلك لنفرض أننا في حلقة بوليانية, و أن X مجموعة جزئية من مجموعة كلية ما, لذلك فإن $X = X^2$. و هذه تكتب على النحو : $X (1-X) = 0$ (كما في الجبر العادي). هي تعني أن تقاطع X مع $(1 -X)$ يساوي المجموعة الخالية. و هذا يقترح أن نسمي $(1 -X)$ متممة المجموعة الجزئية X.

بول و القوانين الأساسية للفكر

من المعروف أن القوانين الأساسية للفكر ثلاثة :

1- قانون الهوية (الذاتية) (The Law of Identity) الذي ينص على أن :" P هي P ", أو " القضية P تكون P ".
2- قانون عدم التناقض (The Law of Non-Contradiction) الذي ينص على أنه :" لا يمكن أن تكون القضية P و نفي P في آن واحد ". أي إذا أثبتنا قضية ما لا يمكننا أن ننفيها في الوقت نفسه. و بعضهم يطلق على هذا القانون " مبدأ لايبنز في عدم التناقض ".
3- قانون الثالث المرفوع (The Law of excluded middle) و نصه: " القضية إما P أو نفي P, و لا وسط بين ذلك ". أي " ليس ثمة وسط (ثالث) بين P و نفي P ". وهو يعني أن النقيضين لا يمكن أن يكونا صحيحين معاً, أو خاطئين معاً, بل لا بد من أن أحدهما صحيح, و الآخر خاطئ.

و إذا تبنينا طريقة بول في نظرته إلى الأشياء فإن العديد من المبادئ الميتافيزيقية قد أضحت حقائق جبرية. لنر كيف استنتج بول " قانون عدم التناقض " بطريقة جبرية انطلاقاً من عبارة بسيطة. فقد تبنى بول الفرضية $X = X^2$ كقانون أساسي للفكر. ثم تابع مناقشاته على نحو جبري, حيث استنتج من الفرضية السابقة : $X - X^2 = 0$. و من ثم : $X\,(1 -X) = 0$. و الحد الأول من الطرف الأيمن هو القضية X, و الحد الثاني هو ($1 - X$), وهذا نفي X كما ذكرنا آنفاً. و الطرف الأيسر (الصفر) يرمز إلى المجموعة الخالية (لا شيء). و من ثم أصبحت العبارة تعني أنه لا وجود لشيء مشترك بين القضية, و نفيها. أي أن " X و نفي X " غير صحيح. وهذا هو عين قانون عدم التناقض.

كما يمكن التعبير عن قانون الثالث المرفوع بالعبارة الجبرية $X + (1 - X) = 1$. أي أن أي عنصر إما أن ينتمي إلى المجموعة X, أو ينتمي إلى متممتها.

بول و القياس

من المعروف أن القياس هو أكمل أنواع الاستنتاج الصوري من وجهة نظر المنطق الصوري. و القياس انتقال من قضيتين تلزم عنهما قضية أخرى تسمى نتيجة. ومن أشهر أمثلة القياس :

كل رجل فان " مقدمة كبرى "

سقراط رجل " مقدمة صغرى "

سقراط فان " نتيجة "

فإذا صدقت المقدمتان صدقت النتيجة بالضرورة في المنطق الصوري. و الآن سنحاول الوصول إلى هذه النتيجة انطلاقاً من المقدمتين باستخدام بعض الطرق الجبرية. لذلك سنفرض أننا اخترنا المجموعة الكلية بحيث تتضمن " مجموعة كل الفانين ", و " مجموعة كل الرجال ", و مجموعة وحيدة العنصر تتألف من سقراط. و نرمز لهذه المجموعات على التوالي بالرموز X , Y , Z. و من ثم فإنه يمكن التعبير عن القضية الأولى " كل الرجال فانون " بالمعادلة التالية : $Y X = Y$. و هذا لا يفترض صحة هذه القضية, بل تنص المعادلة على أنه إذا أردنا تأكيد صحتها فإنه يعبر عنها بهذه الطريقة. و بالمثل فإنه يمكن التعبير عن القضية الثانية " سقراط رجل " بالمعادلة التالية : $Z Y = Z$. و بتعويض قيمة Y من المعادلة الأولى في المعادلة الثانية نحصل على : $Z Y X = Z$, و بضرب طرفي هذه المعادلة بالمقدار X نجد : $Z Y X^2 = Z X$. (كل الخطوات التي قمنا بها حتى الآن منسجمة تماماً مع قواعد الجبر العادي). و بالاستفادة من أن $X^2 = X$ تصبح المعادلة الأخيرة $Z Y X = Z X$. ولكن $Z Y X = Z$. إذن $Z X = Z$. و هذه تعني أن " سقراط فان ". لنوضح هذه الفكرة بطريقة أكثر بساطة. لذلك نفرض ثلاث مجموعات X , Y , Z بحيث أن X محتواة في Y, و أن Y محتواة في Z. فإننا نستنتج في المنطق الصوري أن X محتواة في Z. بينما يمكن البرهان على صحة هذه النتيجة في المنطق الحديث.

من أجل ذلك لنعرف عملية التقاطع على النحو التالي : نقول إن X محتواة في Y يكافئ (منطقياً) أن تقاطعهما يساوي X. و نعني بالتكافؤ أن تحقق الأولى يقتضي الثانية, و تحقق الثانية يقتضي الأولى. و نعبر عن ذلك رمزياً $X = Y \cap X \leftrightarrow X \subseteq Y$. كذلك فإن $Y = Z \cap Y \leftrightarrow Z \supseteq Y$. و بتعويض قيمة Y من المساواة الثانية في المساواة الأولى نجد :

$Z \cap Y \cap X = X$. و لكن $Z \cap X = Z \cap (Y \cap X) = Z \cap Y \cap X$ (و ذلك بالاستفادة من المساواة الأولى). إذن $Z \cap X = X$, و هذا يكافئ أن X محتواة في Z.

و هذا التوضيح يعطي فكرة عن الطريقة التي استخدمها بول في معالجة قضايا المنطق بأسلوب جبري. لذلك يقال إن بول حينما وضع هذا الحساب المنطقي لم يدّع أن ماهية المنطق جبرية, و إنما أراد فقط أن يؤكد على أنه " إذا أمكن التعبير عن العمليات الجبرية و المنطقية برمز واحد فإن تعبيراتهما الرمزية تخضع لقوانين واحدة ". و مما أكده بول أيضاً في عمله أنه يجب ربط المنطق بالرياضيات, و ليس بالميتافيزيقا كما كان يجادل الفيلسوف وليام هاملتون.

الفلاسفة و المنطق

على الرغم من أن ما قدمه بول في دراسته للمنطق كان من دون ريب نقطة انعطاف في تطور المنطق, إلا أنه من الملاحظ أن اهتمام الفلاسفة به كان أقل بكثير من اهتمام الرياضيين. فعلى الرغم من أن بول نشر كتابه الأول في المنطق عام 1847م, إضافة إلى كتاب آخر أصدره دي مورغان على نحو مستقل هو " المنطق الصوري " Formal Logic, و الذين كانا فتحاً علمياً جديداً, بيد أن اهتمام الفلاسفة بالمنطق على

نحو جدي لم يبدأ حتى مطلع القرن العشرين. و مما سارع في هذا الاهتمام, خصوصاً في انكلترا, هو ظهور كتاب برتراندرسل " أسس الرياضيات " Principles of Mathematics عام 1903م, ثم ظهور كتابه " أصول الرياضيات " Principia mathematica (3 أجزاء) الذي صدر في الفترة 1910- 1913 م, و شاركه في تأليفه ألفريد نورث وايتهد Alfred North Whitehead. و هذا الكتاب قام بدور كبير في نمو المنطق الرياضي. لأنه من المعروف أن الفلسفة الغربية الحديثة (الممتدة من عام 1600م إلى عام 1900م) قد أهملت المنطق الصوري إهمالاً كبيراً, بل و قامت بنبذه. فقد كان الفيلسوف الألماني لايبنز Leibniz G.W. (1646- 1716 م) الفيلسوف الوحيد بين الفلاسفة الكبار في أوربا الذي كان فيلسوفاً, و منطقياً. أما الفلاسفة الآخرون فكانوا يجهلون أسس المنطق الصوري نفسه, ومن هؤلاء فلاسفة كبار مثل الفيلسوف الألماني كانت Kant, و الفيلسوف والرياضي الفرنسي رينيه ديكارت (1596- 1650). وهذا الأخير كان عدواً لدوداً للمنطق الصوري.

لذلك خصص لجورج بول حوالي صفحة في الموسوعة الفلسفية (Encyclopedia of Philosophy) (الصادرة عام 1967م) من أصل ثمانية مجلدات, في حين خصص له بل (E.T.Bell) فصلاً كاملاً من أصل تسع و عشرين فصلاً في كتابه " رجال الرياضيات " Men of Mathematics (الصادر عام 1937).

و في الختام لابد من الإشارة إلى أن بول يعد واحداً من أبرز علماء الرياضيات الذين عملوا في مجال الرياضيات البحتة في القرن التاسع عشر الميلادي. و قد استفاد من فكره الرياضي في أبحاثه في المنطق. و قد ذهب رسل في مقال له نشر في مطلع القرن العشرين إلى أن :" الرياضيات البحتة قد اكتشفت من قبل جورج بول في عمله المعروف " قوانين الفكر " ". وقد أسيء فهم هذا القول في بعض الأوساط, فضلاً عن أنه يبخس كثير من الرياضيين حقوقهم, و مكانتهم. وهذا ما حدا برسل إلى أن يبعث رسالة في عام 1954م إلى الأكاديمية الملكية الايرلندية, التي كانت تحتفل عندها بذكرى مرور قرن على إصدار بول لكتابه " قوانين الفكر " يقول فيها : " إن التعليق الذي اقتبستموه مني وهو : "" أن الرياضيات البحتة قد اكتشفت من قبل بول, " يجب أن لا يؤخذ بمعناه الحرفي, و لكن كتعبير أريد منه الإشارة إلى أهمية الموضوع الذي أنجزه بول ".

و لا بد من الإشارة إلى أن مآثر بول المنطقية تستخدم في هذه الأيام على نطاق واسع في مجال الرياضيات البحتة, و في معالجة مشاكل التأمين, و في نظرية المعلومات Information Theory, و في مجالات أخرى عديدة, فضلاً عن أنه, كما قلنا, يعده بعضهم واهب الحاسوب ملكة " العقل ".

<u>مراجع البحث :</u>

- A History of Mathematics, C. Boyer
-Fundamentals of Mathematics, M.Richardson
-Mind Tools, R.Rucker
-Topics in Algebra, I.N.Herstein

- المنطق و فلسفة العلوم , بول موى , ترجمة : د. فؤاد حسن زكريا.
- الفلسفة المعاصرة في أوربا , إ. م . بوشنسكي , ترجمة : د . عزت قرني.

نظرية المجموعات..إضاءة تاريخية

د. محمود باكير

لنمعن النظر في القول التالي الذي تتناوله بعض الأدبيات : " إن حلاق القرية يحلق لجميع رجال القرية الذين لا يحلقون لأنفسهم ", فنجد أنه ينطوي على تناقض (محيّرة), و لا نستطيع تبيان صحة, أو خطا, هذه العبارة. و ذلك لأنه إن كان هذا الحلاق لا يحلق لنفسه كأحد أفراد القرية, فإنه كحلاق للقرية سيحلق لنفسه, و هذا يناقض التصريح. و إن كان يحلق لنفسه كأحد أفراد القرية فهذا يناقض التصريح أيضاً لكونه يحلق للذين لا يحلقون لأنفسهم. و نخلص إلى أن القول يتضمن في طياته تناقضاً لا مفر منه. و قد طرح هذا التناقض في مطلع القرن العشرين (عام 1902م) الرياضي و المنطقي الإنكليزي برتراند رسل Bertrand Russell (1872- 1970). و على الرغم من أن هذا التناقض قد ارتدى حلة جديدة, و كان لبواعثه ما يبررها, إلا أن نشأته تعود إلى فترة موغلة في القدم نسبياً. و تكمن أهميته في الفترة التي بعث بها أثناء ولادة " نظرية المجموعات " التي يعود الفضل فيها إلى الرياضي جورج كانتور G.Cantor (ينحدر أصله من الدانمارك, وولد في روسيا, و قضى معظم حياته في ألمانيا, و عاش في الفترة (1845- 1918)). و خاصة أن أفكار كانتور كانت تثير كثير من الجدل, و الانقسام الحاد بين معاصريه من الرياضيين.

فمنذ القدم, و تحديداً في القرن الرابع قبل الميلاد قال ابيوليدس – Eubulides : " إن البيان الذي أقوله الآن كاذب ". و بالتفكير في هذا التصريح نجد أنفسنا بمواجهة بيان لا يمكن الإنباء بصدقه, أو بكذبه, لما ينطوي عليه من تناقض. و ربما كان أقدم تناقض تم توارثه هو ما طرحه إبيمندس Epimenides -(و هو فيلسوف من جزيرة كريت) حينما قال : " إن جميع الكريتيين دائماً يكذبون ". كذلك نجد, و بدون عناء, أن هذا التصريح يحمل في ثناياه تناقضاً لأن قائله كريتي.

و إذا ارتأينا أن تكون مادة هذا التناقض نظرية المجموعات فإننا نجد, و قبل الشروع في ذلك, أن بعض عناصر المجموعات هي مجموعات قائمة بنفسها. فهيئة الأمم المتحدة مجموعة من الدول, و أعضاء هذه المنظمة (الدول) كل منها مجموعة من المواطنين. و من جهة أخرى هل من الممكن أن تكون هذه المجموعة – التي نتكلم عنها – عنصراً (عضواً) في نفسها؟ فالأمم المتحدة ليست كذلك, لأنها ليست دولة مستقلة في العالم, و كذلك مجموعة الرجال ليست برجل, و مجموعة المدرسين ليست بمدرس. و من ثم فإن هذه المجموعات لا تنتمي – كعنصر – إلى نفسها. بيد أن هناك مجموعات تحقق ذلك, فمجموعة كل الأفكار عبارة عن فكرة, لذا فهي تتضمن نفسها, و مجموعة كل المجموعات التي تخطر في البال من هذا النمط أيضاً, كذلك مجموعة كل المجموعات.

لنطلق على المجموعات التي لا تتضمن نفسها كعنصر فيها " بالمجموعات العادية ". و في خلاف ذلك نطلق عليها " مجموعات فوق عادية ". و لنرمز لمجموعة كل المجموعات العادية بالرمز N. و السؤال الآن : هل N نفسها مجموعة عادية, أو فوق عادية؟. لنفرض جدلاً (مؤقتاً) أن N فوق عادية, ومن ثم فهي - وفق تعريف فوق العادية - تتضمن نفسها كعنصر فيها, أي أن N عنصر في المجموعة N. و لكن N – وفق تعريفها – هي مجموعة كل المجموعات العادية, لذلك فكل عنصر فيها مجموعة عادية؛ أي أن N مجموعة عادية, و هذا يناقض افتراضنا بأنها فوق عادية. لنفرض الآن العكس, أي أن N مجموعة عادية, و لكن N – وفق تعريفها – هي مجموعة كل المجموعات العادية, و بما أننا افترضناها عادية, فهي إذن يجب أن لا تنتمي لنفسها كعنصر. و من ثم فقد أضحت فوق عادية - وفق التعريف - , و هذا يناقض افتراضنا بأنها عادية.

و من الممكن صياغة هذا التناقض بلغة نظرية المجموعات, على نحو آخر, و ذلك باستخدام ما يسمى " خاصية رسل ", أو " تناقض رسل ", الذي يعبّر عنه على النحو التالي : لتكن S المجموعة التي تتضمن مجموعة ما X إذا كانت المجموعة X لا تنتمي إلى نفسها, أي أن : $S = \{X : X \notin X\}$. و يمكن إثبات أنه إذا افترضنا S هي عنصر من S, فإن هذا يؤدي إلى تناقض. كما يمكن إثبات أنه إذا افترضنا S ليست عنصراً من S, فإن هذا يؤدي إلى تناقض أيضاً. و مع اكتشاف " تناقض رسل " بدأ الحد من استخدام مفهوم " مجموعة كل المجموعات ", لأن استخدامه كان يتم بعيداً عن الانضباط الرياضي الصارم. و من القضايا المحزنة أن الرياضي والمنطقي الألماني " فريج – G.Frege " كان قد أمضى سنوات طوالاً يحاول فيها إعادة بناء الرياضيات على أسس منطقية, و تمثل عمله في مجلدين استخدم فيهما مفهوم " مجموعة كل المجموعات ". و عندما قارب الانتهاء من تأليف مجلده الثاني استلم رسالة من " رسل " عام 1903 يخبره فيها اكتشافه لهذا التناقض, مما حدا به إلى التوقف عن طباعة عمله هذا.

وبالتوقف هنيهة عند هذا التناقض لتشخيص الخلل, و معرفة مكنوناته, نجد أنه في كل مرة لدينا مجموعة, و عنصر منها, و نعرّف هذا الأخير اعتماداً على المجموعة نفسها. و توصف مثل هذه التعاريف بأنها " غير توكيدية – Impredicative ", و هي ذات طبيعة دائرية.

و توضيحاً لما عنيناه, ببساطة, لنرمز لمجموعة سكان القرية في عبارة " رسل ", آنفة الذكر, بالرمز X و للحلاق بالرمز b, ومن ثم نجد أن b قد عرّف (على نحو غير توكيدي) كالتالي : " هو العنصر في X الذي يحلق لكل عناصرها, و هؤلاء العناصر هم فقط من X الذين لا يحلقون لأنفسهم ". و نلاحظ دائرية هذا التعريف عندما استعنا بعناصر المجموعة (سكان القرية) لتعريف الحلاق الذي هو عنصر من المجموعة نفسها. و يعتقد بأن أول من أشار إلى ذلك الرياضي و الفيلسوف الفرنسي هنري بوانكاريه Henri Poincare, و يشاطره في ذلك برتراند رسل حينما يقول : " لا يحق لأية مجموعة أن تتضمن عناصر لا يمكن تعريفها إلاّ بالاعتماد على المجموعة نفسها, أو تتضمن عناصر تستخدم, أو تفرض مسبقاً, هذه المجموعة ".

و يعد هذا التناقض من أشهر التناقضات العديدة التي أثيرت حول نظرية المجموعات في الفترة ما بين عامي 1895 و 1910. و قد ظن بعضهم في حينه أنها ليست أكثر من سراب ذهني, و لن تعدو أكثر من فقاعات رياضية تستعصي على الفهم. و قد ظن بعضهم بأن عملية " تجميلية " بسيطة, لبعض التعاريف الأساسية, كافية للتخلص من هذه العيوب المنطقية. بيد أن رسل, و بتعويمه لتناقضه, قد دق ناقوس الخطر, لأن تناقضه يدخل في صلب أساسيات نظرية المجموعات, و لم يعد من الممكن التغاضي عنه. و تلا ذلك اكتشاف بعض التناقضات الأخرى التي شكلت بمجموعها تحدياً أساسياً لصحة مفاهيم نظرية المجموعات, و تنذر بنسف كيان هذه النظرية من جذورها.

وبدأ البحث يدور حول سبل النجاة من هذه الدوامة الرياضية - المنطقية منذ عام 1905, و طرح رهط من الرياضيين مراجعة أسس نظرية المجموعات, حيث تمركز الطرح حول " وجود المجموعة ", و الصفات المشروعة التي تعرّفها في حال وجودها, و كيفية نسج مجموعات جديدة من مجموعة قائمة. و الدوافع التي كانت تغذي هذه الطروحات هي أن المفهوم الحدسي للمجموعة, الذي جسده كانتور في تعريفه لا يقدم أساساً كافياً لنظرية المجموعات. وهذا التعريف هو أن المجموعة : " تجميع لعدة أشياء متمايزة تماماً محسوسة, أو مجردة ".

و سرعان ما بدأت عدة محاولات للتخلص من هذه المتناقضات من سياق النظرية الوليدة, و ذلك بإهمال بعض المفاهيم, و التعاريف. بيد أنها ولدت جميعها ميتة. و كان لابد من حتمية التصدي, و مواجهة هذه التشوهات, و معالجتها, بعقلية علمية جريئة, و ذلك بالقيام بفتح علمي جديد.

و قد تبلور أسلوب المعالجة في ثلاث مدارس فكرية تعنى بفلسفة الرياضيات. وهذه تقتضي, على نحو أساسي, محاولة إعادة بناء المعارف الرياضية المبعثرة, و المتراكمة عبر العصور, بحيث تتبلور ضمن ترتيب معين, أو معنى محدد. و على الرغم من أن نشأة هذه المدارس تعود إلى ما قبل هذا التاريخ, بيد أن هذه " الأزمة " ساهمت في إنضاج هذه المدارس, وتأطيرها, و كانت القضية التي كبرت بها. و الإبحار في فلسفة هذه المدارس يتطلب رحلة خاصة إلى عالمها الواسع, بيد أن هذا لا يمنع, في هذه العجالة, من الإطلالة السريعة لاستعراض معالمها الرئيسة.

أولى هذه المدارس تدعى المدرسة " المنطقية " Logistic , التي روادها الفيلسوف والمنطقي الإنكليزي برتراند رسل, و الفيلسوف و الرياضي انكليزي وايتهد - A.N.Whitehead (1861- 1947), مع أن هناك محاولات سبقت بزوغ هذه المدرسة تجسدت في بعض أعمال الرياضي الألماني ديديكند J.W.R. Dedekind (1831- 1916), و المنطقي الألماني فريج F.L.G.Frege (1848- 1925) في الربع الأخير من القرن التاسع عشر الميلادي, وذلك أثناء سعيهم إلى رد بعض المفاهيم الرياضية إلى أخرى منطقية. و تتلخص فلسفتهم في أن الرياضيات رجولة المنطق, و أن المنطق شباب الرياضيات, و يجب صياغة كل المفاهيم الرياضية, و التعبير عنها, باستخدام المفاهيم المنطقية, وأن تُطوّر النظريات الرياضية كنظريات في علم المنطق. و باختصار فإن هدفهم المنشود أن ترتدي الرياضيات عباءة المنطق.

و ثانيتهما المدرسة " الحدسية " Intuitionist , و مؤسسها الرياضي الهولندي بروور L.E.J.Brouwer (1881- 1966) عام 1908, ثم التحق به الرياضي هيرمان ويل Herman Weyl (1885- 1955). مع أننا نجد بعض بذور أفكارها قبل ذلك عند الرياضي الألماني ليوبولد كرونيكر Leopold Kronecker (1823- 1891), و الرياضي الفرنسي بوانكاريه. و يقول أنصار هذه المدرسة بأن نبع الرياضيات يكمن في البديهة التي تعمل على توضيح المفاهيم الرياضية, و أنه لا يمكن ترميز الرياضيات على نحو كامل, و أن التفكير الرياضي مستقل عن اللغة الخاصة التي استعملت للتعبير عنه. كما أن البيان الذي ينبيء بوجود كائن ما ذي خواص معينة, يعني أن هناك طريقة معروفة تمكّننا من إيجاد, أو إنشاء, هذا الكائن بواسطة عدد منته من الخطوات. و تحديداً تعترف هذه المدرسة بقدرة الإنسان على إنجاز سلسلة من الأعمال الذهنية ذات عدة مراحل, و بهذه الطريقة نحصل على ما تسميه " سلاسل أساسية ", و أشهرها سلاسل من الأعداد الطبيعية. و السمة المميزة لفلسفتهم تشرنقها, و اكتفاؤها الذاتي, حيث تنأى بنفسها عن المنطق, و الفلسفات الأخرى. و من المفيد الإشارة إلى أن الرياضي كرونيكر كان يؤمن بأن الرياضيات منشأة أعمدتها الأعداد الطبيعية, و المدركة على نحو حدسي. وقد حاول " تحسيب " (نسبة إلى الحساب) الرياضيات من خلال تطويع كائناتها باستخدام نظرية الأعداد.

و ثالث هذه المدراس هي المدرسة " الصورية " Formalist , التي أفرزتها الموضوعات العشرون المتعلقة بالهندسة الإقليدية الذين أوجدهم الرياضي الألماني ديفيد هيلبرت David Hilbert (1862- 1943). و تنص وجهة نظرهم على أن الرياضيات تهتم بأنظمة شكلية مرّمزة, و يمكن عدها كمجموعة من التطورات المجردة, ذات عبارات مؤلفة من رموز, و بياناتها عبارة عن صيغ تستخدم هذه الرموز. و أن أساس الرياضيات لا يكمن في المنطق, بل تحديداً في مجموعة من الإشارات, و الرموز, و بمجموعة من العمليات تستخدم هذه الإشارات. و أن ما تنشده الرياضيات هو دراسة بنى الأشياء من خلال إيجاد نظام من الرموز للتعبير عن هذه الأشياء. فالرياضيات – من وجهة نظرهم – تهتم بالخواص البنيوية لأنظمة الرموز بعيداً عن معانيها. و الرمز بحد ذاته مجرد عن أي معنى, أو مغزى, باستثناء عند ربطه بالرموز الأخرى.

هذا و لم يحل ذلك دون ظهور بعض الومضات الفلسفية الأخرى, من هنا و هناك, إلاّ أنها كانت انتقائية من الفلسفات الثلاث, و ربما توفيقية, بيد أنها لم تجد صدى لها. و حاولت كل مدرسة من هذه المدارس معالجة " أزمة " نظرية المجموعات ضمن إطارها الفلسفي الملتزمة فيه, و قد شرع ببناء عدة نظريات للمجموعات خالية من التناقض. و أبرز هذه المحاولات, و أكثرها قبولاً, كان إيجاد " نظرية مجموعات " مبنية على أسس موضوعاتية (تنطلق من جملة من الموضوعات الرياضية), و تنشد استبعاد المتناقضات من كيان هذه النظرية. و أولى هذه الخطوات قام بها الرياضي الألماني إرنست زرميلو Ernst Zermelo (1871- 1956) عام 1908 عندما نشر بحثاً تضمن " نظاماً من الموضوعات" لأجل " نظرية المجموعات ". ثم أخضع هذا النظام للتعديل عدة مرات من قبل عديد من الرياضيين, كان آخرها في الأربعينيات من القرن العشرين. و هو المستخدم حالياً, لأن جلّ الرياضيين يعتقدون أن الطريقة الموضوعاتية في بناء نظرية المجموعات هي أفضل الطرق تلبية لمتطلبات الرياضيات الحديثة. و لأن اتساع مفهوم المجموعة المجسد في أنظمة زرميلو و فان نيومان John von Neawmann (رياضي أمريكي, هنغاري الأصل (1903-1957)) يفي بكل أغراض الرياضيات. إلاّ أن إجراءاتهم قد لاقت بعض النقد لكونها تجسدت في تجنب هذه المتناقضات, و لم تقدم ضماناً بعدم مصادفة تناقضات من نوع آخر في المستقبل.

و في مطلع الثلاثينيات من القرن العشرين برهن الرياضي والمنطقي الأمريكي (النمساوي الأصل) كورت غودل Kurt Godel ما يسمى " نظرية اللاتمام ", التي نفت أية إمكانية لبرهان اتساق موضوعات زرميلو – فرانكل لنظرية المجموعات. و على الرغم من ذلك فإن معظم الرياضيين يؤمنوا بأنهم لن يواجهوا بتناقض آخر, و هذا ما توحي به هذه الموضوعات. و ما ساهم في تعميق هذا الإيمان, وترسيخه, هو ما أظهرته هذه النظرية من تماسك, و تلاحم, تحت مطرقة الاستخدام إلى يومنا هذا.

و هناك نظريات أخرى للمجموعات منها ما يسمى " نظرية الأنماط " Type Theory لبرتراند لرسل, و نظرية أخرى خاصة بالمدرسة الحدسية, إضافة إلى عديد من الأفكار التي كانت روافد لمعالجة الموضوع نفسه, و لم تنتظم ضمن التيارات الرئيسية الثلاث.

و على الرغم من أن ثمة حفنة من الرياضيين تنادي بخطورة استخدام نظرية المجموعات بردانها الحالي, بيد أن جُلّ الرياضيين يتجاهلون مثل هذه التحذيرات, و خاصة أن هذه كانت أفضل الخيارات المتاحة.

20

ملحق بالمحاضرات

مقرر : تاريخ الرياضيات (قسم الرياضيات), العام الدراسي 2016- 2017

كتب و مقالات مفيدة كمراجع للمقرر:

(معظمها موجود في الشبكة العالمية للمعلومات-(الإنترنت))

1- " تاريخ الرياضيات العربية بين الجبر والحساب ", د. رشدي راشد, مركز دراسات الوحدة العربية (بيروت), ط1, 1989.

2- " رياضيات الخوارزمي..تأسيس علم الجبر ", د. رشدي راشد, ترجمة : د. نقولا فارس, مركز دراسات الوحدة العربية (بيروت), ط1, 2010.

3- " دراسات في تاريخ العلوم العربية وفلسفتها ", د. رشدي راشد, مركز دراسات الوحدة العربية (بيروت), ط1, 2011.

4- A History of Mathematics, Carl B. Boyer, Princeton University Press.

5- Mind Tools, Rudy Rucker, penguin Books .
خاصة من الصفحة 31 حتى 35 History of Ideas

6- " الرحلة من كذبة أبريل إلى الحاسوب ", د. محمود باكير, مجلة العربي (الكويت), العدد 696, نوفمبر 2016.

7- " الرياضيات منهجاً للتفكير ", د. محمود باكير, مجلة العربي (الكويت), العدد 689, أبريل 2016.

8- " الأخلاق والرياضيات ", مجلة المعرفة (وزارة الثقافة - سورية), العدد513, حزيران 2006.

9- دراسات لغوية من منظور رياضي ", د. محمود باكير, جامعة دمشق, الأدب العلمي, 2015.

10- " العدد.. من الحضارات القديمة حتى عصر الكومبيوتر ", جون ماكليش, ترجمة : د. خضر الأحمد, و د. موفق دعبول, عالم المعرفة (الكويت), 1999.

أسئلة :

يمكن الإجابة على هذه الأسئلة بعد قراءة المحاضرات

(الإشارة * للدلالة على صعوبة السؤال)

1- ما هو الفرق بين البديهية, والمسلمة, والموضوعة, و المصادرة, من وجهة نظر الرياضيات قديماً وحديثاً؟

2- هل تعتقد أن دراسة تاريخ الرياضيات مهمة في دراسة الرياضيات؟ ولماذا؟

3- هل تعتقد أن فلسفة الرياضيات مهمة في دراسة تاريخ الرياضيات؟ و لماذا؟

4*- يقول مؤرخو الرياضيات بأن : " رياضيات أي عصر مؤشر على ثقافته "..ما هو رأيك بهذا القول مع التبرير؟ هل يمكن أن تضرب بعض الأمثلة؟

5- ما هو تعريف " أصول الرياضيات "؟ وما هي علاقتها بتاريخ الرياضيات؟

6- ما هي سلبيات دراسة تاريخ الرياضيات بعيداً عن دوافعها الإنسانية؟

7*- يقول ليون برنشفيك : " إن الرياضيات أعلى درجة وصل إليها الفكر الإنساني "..لماذا الرياضيات سابقة للحقول المعرفية الأخرى؟ أي ما هي السمات التي تملكها الرياضيات ويفتقدها غيرها؟

8- ماذا تقتضي فلسفة الرياضيات, وما هي علاقتها بتاريخ الرياضيات؟

9- أعط مثالاً عن أهمية فلسفة الرياضيات في دراسة تاريخ الرياضيات, مع التبرير.

10- أعط مثالاً من تاريخ الرياضيات عن علاقة البعد الفلسفي بالبعد المنطقي, مع التبرير.

11- متى تبلورت مدارس فلسفة الرياضيات, وما علاقتها بتاريخ نظرية المجموعات؟

12- ما هي أزمة الرياضيات التي نشأت في نهاية القرن التاسع عشر الميلادي, وماذا كانت نتيجتها؟

13- أي من المدارس الفلسفية الرياضية تعتقد أنها أصح برأيك الشخصي, ولماذا؟

14*- أي من الحقول المعرفية تعتقد أن له التأثير الأكبر في دراسة تاريخ الرياضيات, مع التبرير؟

15- ما هي الجوانب الثلاثة المهمة في دراسة تاريخ العلوم, ومنها تاريخ الرياضيات؟ وأي الجوانب أكثر طغياناً؟ ولماذا؟ وما هو رأيك؟

16*- هل لدراسة تاريخ الرياضيات دور معرفي في الثقافة الإنسانية؟ ما هو؟

17- يقول أحدهم : " إن دراسة تاريخ الرياضيات هو أحد أبعاد دراسة الرياضيات "..ما هو رأيك بهذا القول؟ برر إجابتك.

18- هل تغيّر موقفك من الرياضيات قبل دراسة تاريخ الرياضيات وبعد دراسته؟ ولماذا؟

19- ما هو عيب الدراسة التقليدية لتاريخ الرياضيات برأيك الشخصي؟

20*- ما هي علاقة نتائج نظرية غودل (مبرهنتا اللاتمام) بدراسة تاريخ الرياضيات؟ أي هل كان لإحدى هذه النتائج, على المستوى الإنساني, أثر في تحديد مسار تاريخ الرياضيات؟

21- ما هو أهم ملمح من ملامح الرياضيات الحديثة من وجهة نظرك؟ ولماذا؟

22- ما أثر تاريخ " البديهيات ", و " المصادرات " على طبيعة الرياضيات الحديثة, وتطورها؟

23- هل " للنزعة الاقتصادية " علاقة بالرياضيات, وبتطورها؟ أضرب مثالاً على ذلك.

24- ما هي " البنيوية " في الرياضيات؟

25- كيف تطور النظام الموضوعاتي في الرياضيات؟

قضايا في تاريخ الرياضيات للتفكير بها والبحث عنها من قبل الطلاب :

1- يقول جون ماكليش مؤلف كتاب " العدد " (عالم المعرفة – الكويت, الصفحة 11) : " ففي الرياضيات, غالباً ما قام نجوم مثل فيثاغورس وإقليدس بطرح مشكلات أكثر من تلك التي تمكنوا من حلها ". ما رأيك في هذا القول؟

2 – يقول الفيزيائي بول ديراك أحد كبار رواد ميكانيك الكم : " إن الأفكار التي اختارتها الرياضيات تكون الطبيعة قد اختارتها سلفاً ". ما هو رأيك في هذا القول؟و ماذا تستنتج من ذلك؟ هل يمكن أن تضرب أمثلة على القول؟

3 - يقول رولان أومنيس في كتابه " فلسفة الكوانتم " (عالم المعرفة- الكويت, الصفحة 86) وهو يتحدث عن اهمية رموز التدوين في الرياضيات. ثم يسأل : " هل هذا هو السبب الذي جعل الجبر من نواتج الحضارة العربية, التي ترفض أي أصنام وصور صريحة وأعطت الجبر اسمه؟ ". قارن ذلك بوجهة النظر المختلفة التي يقولها رشدي راشد في كتابه " رياضيات الخوارزمي. تأسيس علم الجبر " (مركز دراسات الوحدة العربية – بيروت). ما هو السبب في اختلاف وجهات النظر هذه؟

4 – ما هي علاقة رياضيات الخوارزمي بثقافة عصره في القرن الثامن الميلادي, وخاصة مع علوم اللغة, وعلم الفرائض؟ انظر كتابه : " رياضيات الخوارزمي. تأسيس الجبر ", الصفحة 61 – 80, وغيرها.

5 – يقول Rudy Rucker في كتابه " Mind Tools ", الصفحة 31-35, ما خلاصته أنه :" في الألف سنة الأخيرة نجد أن العصور الوسطى كانت عصر العدد, و عصر النهضة كان عصر الفضاء, وأن الثورة الصناعية كانت عصر المنطق, والعصر الحديث هو عصر اللانهاية, والأن ندخل عصر المعلومات (نظرية المعلومات التي أسسها كلود شانون Claude Shannon). ما هو رأيك؟ و ماذا تستنتج؟

6 – ما هو الفرق بين الرقم والعدد؟ ومن ثم ما هو الفرق بين تاريخ الأرقام وتاريخ العدد؟

7- ما هي علاقة الألغاز, والأحجيات, بتطور الرياضيات؟ اضرب مثالاً على ذلك.

8- بالعودة إلى كتاب " الشفاهية والكتابية " (مؤلفه : والتر أونج, ترجمة : حسن البنا عزالدين, عالم المعرفة – الكويت, الصفحات : 44, 45, 115, وغيرها). ما هي علاقة ما يطرحه الكتاب بتطور الرياضيات, وتاريخها.