[illegible] حل التمرين [illegible]

1) الحل

① نعلم أن القاعدة القانونية هي

$E = (e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1))$

$L(e_1) = (-4,-6,0) = -4e_1 - 6e_2 + 0e_3$

$L(e_2) = (3,5,0) = 3e_1 + 5e_2 + 0e_3$

$L(e_3) = (3,6,5) = 3e_1 + 6e_2 + 5e_3$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P_L(x) = P_A(x) = \det(xI - A)$$

$$= \begin{vmatrix} x+4 & -3 & -3 \\ 6 & x-5 & -6 \\ 0 & 0 & x-5 \end{vmatrix}$$

نشر وفق السطر الثالث

$$= (x-5)[(x+4)(x-5)+18]$$

$$= (x-5)(x^2 - x - 2)$$

[illegible] $= (x-5)(x-2)(x+1)$

الدالة المميزة $q_f(x) = P_f(x) = (x-5)(x-2)(x+1)$

$\lambda_1 = 5 \ , \ \lambda_2 = 2 \ , \ \lambda_3 = -1$

$\{5, 2, -1\}$ قيم الذاتية ل f

لحساب القيم الذاتية من اجل الفضاءات الذاتية المرفقة

$P_f(x) = 0$ و $v \in \mathbb{R}^3 \neq 0$ ⇐

متجه الشعاع ذاتي اذا تحقق

$f(v) = \lambda v$

$f(x, y, z) = \lambda (x, y, z)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x + 3y + 3z = \lambda x \\ -6x + 5y + 6 = \lambda y \\ 5z = \lambda z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-4-\lambda)x + 3y + 3z = 0 \\ -6x + (5-\lambda)y + 6 = 0 \\ (5-\lambda)z = 0 \end{cases} \quad *$$

نعوض القيم الذاتية في *

$\lambda = 5$

$$\begin{cases} -9x + 3y + 3z = 0 \\ -6x + 6z = 0 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

ومنه $x = z$

ومنه $-9z + 3y + 3z = 0$

$y = 2z \ , \ z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow V_1 = (z, 2z, z)$

$\lambda = 2$

$-6x + 3y + 3z = 0$; $z = 0$
$-6x + 3y + 6z = 0$; $y = 2x$
$3z = 0$

$\Rightarrow V_2 = (x, 2x, 0)$

$\lambda = 1$

$-3x + 3y + 6z = 0$; $z = 0$
$-6x + 6y + 6z = 0$; $y = x$
$6z = 0$

$\Rightarrow V_3 = (x, x, 0)$

نعوض $z=1$ في V_1

$\Rightarrow V_1 = (1, 2, 1)$

نعوض $x=1$ في V_2

$\Rightarrow V_2 = (1, 2, 0)$

نعوض $x=1$ في V_3

$V_3 = (1, 1, 0)$

$B = \{V_1, V_2, V_3\}$

قاعدة ذاتية لـ R^3 لأنها تتكون من 3 أشعة ذاتية
مستقلة.

4) إن L قطوري لأنه يوجد قاعدة ذاتية لـ V
ومصفوفته القطرية

$$H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) $A = S^{-1} H S$

$A^{n} = S^{-1} H^{n} S$

S مصفوفة الانتقال من القاعدة القانونية إلى الذاتية

S^{-1} مصفوفة الانتقال من القاعدة الذاتية إلى القانونية

لنحسب S

$e_1 = (1,0,0) = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3$

$= \alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(1,2,0) + \alpha_3(1,1,0)$

$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \,,\, 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \,,\, \alpha_1)$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \quad \Rightarrow \alpha_2 = 1 - \alpha_3$

$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$

$\boxed{\alpha_1 = 0}$

$\Rightarrow 2(1 - \alpha_3) + \alpha_3 = 0 \Rightarrow 2 - 2\alpha_3 + \alpha_3 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\alpha_3 = 2} \quad , \boxed{\alpha_2 = -1}$

Scanned by CamScanner

$e_2 = (0,1,0) = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3$

$= \beta_1 (1,2,1) + \beta_2 (1,2,0) + \beta_3 (1,1,0)$

$= (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 , 2\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 , \beta_1)$

- $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0 \Rightarrow \beta_2 = -\beta_3$
- $2\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 = 1$
- $\boxed{\beta_1 = 0}$

$\Rightarrow 0 + 2(-\beta_3) + \beta_3 = 1$

$\Rightarrow -2\beta_3 + \beta_3 = 1 \Rightarrow \boxed{\beta_3 = -1}$

$\boxed{\beta_2 = 1}$

$e_3 (0,0,1) = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3$

$= \gamma_1 (1,2,1) + \gamma_2 (1,2,0) + \gamma_3 (1,1,0)$

$= (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 , 2\gamma_1 + 2\gamma_2 + \gamma_3 , \gamma_1)$

- $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$
- $2\gamma_1 + 2\gamma_2 + \gamma_3 = 0$
- $\boxed{\gamma_1 = 1}$

$\gamma_2 + \gamma_3 = -1 \Rightarrow \gamma_2 = -1 - \gamma_3$

$2(1) + 2(-1-\gamma_3) + \gamma_3 = 0$

$\Rightarrow -2\gamma_3 + \gamma_3 = 0$

$\Rightarrow -\gamma_3 = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma_3 = 0}$

$\boxed{\gamma_2 = -1}$

$e_1 = 0V_1 - 1V_2 + 2V_3$

$e_2 = 0V_1 + 1V_2 - 1V_3$

$e_3 = 1V_1 - 1V_2 + 0V_3$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

اثبت S^{-1}

$L(V_1) = 1e_1 + 2e_2 + 1e_3$

$L(V_2) = 1e_1 + 2e_2 + 0e_3$

$L(V_3) = 1e_1 + 1e_2 + 0e_3$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{32} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^{32} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{32} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

١. لا داعي لفك القوس للمجموعة H حتى ولو كان الأس عدد صحيح يمكن حله.

٢. نكتفي بهذا الحل فقط ولا نكمل عملية إيجاد المجموعة.

التثليث الكلي.

١. تثليث مصفوفات ومؤثر خطي.

تعريف (١):

نقول عن $A \in M_n(F)$ أنها قابلة للتثليث أو تثليثية إذا كانت مشابهة لمصفوفة مثلثية.

تعريف (٢):

ليكن V فضاء، $L: V \to V$ مؤثر خطي و A مصفوفة L بالنسبة لقاعدة ما في V. نقول عن L إنه قابل للتثليث أو تثليثي إذا كانت A تثليثية أي إذا وجدت لـ L مصفوفة مثلثية.

ملاحظات:

١. المصفوفة A قابلة للتثليث إذا كانت كثيرة حدودها المميزة تكتب على شكل جداء أقواس من الدرجة الأولى (بغض النظر إذا كانت مختلفة أو لا)

مثل: $(x+2)(x-1)(x-1)$ ✓ درجة أولى.

$(x^2-1)(x+2)$ ✗ درجة ثانية

٢. المؤثر الخطي L يكون تثليثي إذا كانت كثيرة حدوده المميزة تكتب على شكل جداء أقواس من الدرجة الأولى.

٢- علل: كل مؤشر تطور هو نفسه مؤشر تلوث.

لأن كل [illegible]

مثال

و ← م

٩م ← ٩م

تلوث ← تطور

ليس تطور ← ليس تلوث

تطور ⇏ تلوث

[illegible]

« [illegible] »

إعداد: [illegible]

٤- [illegible]

[illegible]