## ٢ . ٥ . ٢ . أمثلة محلولة:

**مثال (١):**

حل المعادلة التفاضلية على شكل متسلسلة قوى:

$$w'' + w = 0$$

في جوار الصفر.

**الحل:**

المعادلة المعطاة ذات معاملات ثابتة وحلها بطبيعة الحال معروف وهو:

$$w(z) = A\sin z + B\cos z$$

وسنحلها الآن بطريقة متسلسلة القوى. بحيث: $Q(z) = 1$، $P(z) = 0$ وكلتاهما تحليليتان عند $z = 0$ وهي نقطة عادية وكذلك الحال بالنسبة لأي نقطة من المستوي العقدي. وعلى ذلك ستكون متسلسلة الحل متقاربة عند جميع قيم $z$. بمعنى آخر سيكون نصف قطر التقارب $R_c = \infty$.

نفرض الحل على شكل متسلسلة القوى:

$$w' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad \text{و} \quad w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

بالمفاضلة نحصل على: $w'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$

بالتعويض عن $w'', w', w$ في المعادلة نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

ويمكن كتابتها على الشكل: $\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n]z^n=0$

وهذه متطابقة تتحقق فقط بانعدام معاملات قوى z المختلفة على الطرف الأيسر فنحصل على:

$$(n+2)(n+1)\,a_{n+2}+a_n=0 \quad \text{و} \quad n=0,1,2,3,\dots$$

$$a_{n+2}=-\frac{1}{(n+2)(n+1)}a_n \quad ; \quad n\ge 0$$

وهذه الصيغة تسمى الصيغة التكرارية (Recurrence relation) وواضح من هذه العلاقة أن المعاملات ذات الدليل الزوجي تعين بدلالة $a_0$ والمعاملات ذات الدليل الفردي تعين بدلالة $a_1$. إذن:

$$a_2=-\frac{a_0}{2.1}=-\frac{a_0}{2!}\quad,\quad a_4=-\frac{a_2}{4.3}=+\frac{a_0}{4!}\quad,\quad a_6=-\frac{a_4}{6.5}=-\frac{a_0}{6!}$$

وعموماً إذا كان $n=2k$ فإن $a_n=a_{2k}=\frac{(-1)^k}{(2k)!}a_0 \;;\; k=1,2,3,\dots$

بالمثل:

$$a_3=-\frac{a_1}{2.3}=-\frac{a_0}{3!}\quad,\quad a_5=-\frac{a_3}{5.4}=+\frac{a_1}{5!}\quad,\quad a_7=-\frac{a_5}{7.6}=-\frac{a_1}{7!}$$

وعموماً إذا كان $n=2k+1$ فإن $a_n=a_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_1 \;\; k=1,2,3,\dots$

ومن ثمّ نأخذ المتسلسلة الشكل:

$$w=a_0+a_1z-\frac{a_0}{2!}z^2-\frac{a_1}{3!}z^3+\frac{a_0}{4!}z^4+\frac{a_1}{5!}+\dots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}a_0z^{2n}+\frac{(-1)a_1}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\dots$$

$$=a_0\left[1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{3!}+\dots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}+\dots\right]$$

$$+a_1\left[z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\dots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n+1}+\dots\right]$$

$$= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

المتسلسلة الأولى هي متسلسلة تيلور للدالة cos z، والمتسلسلة الثانية هي متسلسلة تيلور sin z. إذن كما هو متوقع:

$$w = a_0 \cos z + a_1 \sin z$$

ونلاحظ أن الثابتين $a_0$، $a_1$ اختياريان.

**مثال (٢):**

أوجد متسلسلة الحل في قوى z لمعادلة آيري (Airy's Equation):

$$w'' = z\,w \quad , \quad -\infty < z < \infty$$

في جوار الصفر.

**الحل:**

في هذه المعادلة لدينا $P(z) = 0$، $Q = -z$ إذن $z = 0$ هي نقطة عادية.

نفرض الحل على الشكل: $w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

بالمفاضلة نحصل على:

$$w'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n$$

بالتعويض في المعادلة المفروضة نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n = z \sum a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}$$

أو:

$$2.1 a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n$$

وهذه المتطابقة تتحقق إذا تساوى معاملا كل من قوى z في الطرفين إذن: $a_2 = 0$.

ونحصل على العلاقة التكرارية: $n = 1, 2, 3, \ldots$ ، $(n + 1)(n + 2)\, a_{n+2} = a_{n-1}$

إذن المعامل $a_{n+2}$ يعطى بدلالة المعامل $a_{n-1}$ وواضح أن المعاملات يمكن أن تعين في ثلاث خطوات. حيث:

$a_0$ يعين $a_3$ والذي هو بدوره يعين $a_6$ ............

$a_1$ يعين $a_4$ والذي هو بدوره يعين $a_7$ ............

و $a_2$ يعين $a_5$ والذي هو بدوره يعين $a_8$ ............

وبما أن $a_2 = 0$ إذن نستنتج مباشرة أن $a_5 = a_3 = a_{11} = \ldots. = 0$ بالنسبة للمعاملات $a_0, a_3, a_6, a_9$ نأخذ $n = 1, 4, 7, 10, \ldots..$ في العلاقة التكرارية فنجد أن:

$$a_3 = \frac{a_0}{3.2}\ ,\ a_6 = \frac{a_3}{6.5} = \frac{a_0}{(6.5)(3.2)}\ ,\ a_9 = \frac{a_6}{(9.8)} = \frac{a_0}{(9.8)(6.5)(3.2)}\ ..$$

ومن الأفضل يمكن كتابة علاقة $a_{3n}$ حيث: $n = 1, 2, 3, \ldots.$

$$a_{3n} = \frac{1}{[(3n)(3n-1)][(3n-3)(3n-4)]\ldots[6.5][3.2]} a_0\ ,\ n = 1,2,3,\ldots$$

بالنسبة للمعاملات: $a_1, a_4, a_7, a_{10}, \ldots.$ نأخذ $n = 2, 5, 8, 11, \ldots$ في العلاقة التكرارية فنجد أن:

$$a_4 = \frac{a_1}{4.3}, a_7 = \frac{a_4}{7.6} = \frac{a_1}{(7.6)(4.3)}, a_{10} = \frac{a_7}{10.9} = \frac{a_1}{(10.9)(7.6)(4.3)}, \ldots$$

ونجد أن:

$$a_{3n+1} = \frac{1}{[(3n+1)(3n)][(3n-2)(3n-3)]\ldots[7.6][4.3]} a_1, n = 1,2,3,\ldots$$

ويكون حل المعادلة التفاضلية (معادلة آيري) من الشكل:

$$w = a_0\left[1+\frac{z^3}{3.2}+\frac{z^6}{6.5.3.2}+\ldots+\frac{z^{3n}}{(3n)(3n-1)\ldots 3.2}+\ldots\right]$$
$$+a_1\left[z+\frac{z^4}{7.6.4.3}+\ldots+\frac{z^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)\ldots 4.3}+\ldots\right]$$
$$=a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{3n}}{(3n)(3n-1)(3n-4)\ldots 3.2}\right]+a_1\left[z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)..4.3}\right]$$

إذن الحل العام لعادلة آيري هو: $w = a_0w_1 + a_1w_2$

حيث: $W(w_1 , w_2) = 1 \neq 0$

وهذه متسلسلة متقاربة من أجل قيم $z$.

**ـــ مثال (٣):**

أوجد حل معادلة آيري في قوى $(z-1)$.

**الحل:**

النقطة $z = 1$ هي نقطة عادية لمعادلة آيري. فنفرض الحل من الشكل:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$$

إذن: $$w' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n (z-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(z-1)^n$$

$$w'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n (z-1)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n-2)(n-1)a_{n+2}(z-1)^n$$

بالتعويض عن $w$ و $w''$ في المعادلة نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(z-1)^2 = z\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^n$$

ويمكن كتابة $z$ معامل $w$ في المعادلة على صورة $(z-1)$ أي:

$$z = 1 + (z - 1)$$

وهذه متسلسلة تيلور للدالة z حول النقطة $z = 1$.

إذن:
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(z-1)^n = [1+(z-1)]\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^{n+1}$$

أو:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}(z-1)^n$$

بمساواة معاملات نفس قوى $(z - 1)$ نحصل على:

$$2a_2 = a_0 \;,$$
$$(3.2)\, a_3 = a_1 + a_0 \;,$$
$$(4.3)\, a_4 = a_2 + a_1 \;,$$
$$(5.4)\, a_5 = a_3 + a_2$$

- - - - - - - - - - - - - -

والعلاقة العامة التكرارية هي: $(n + 2)\,(n + 1)\, a_{n+2} = a_n + a_{n-1} \;,\; n \geq 1$

وحلها بالنسبة للمعامل $a_n$ بدلالة $a_1, a_0$.

$$a_2 = \frac{a_0}{2} \;,\; a_3 = \frac{a_1}{6} + \frac{a_0}{6} \;,\; a_4 = \frac{a_2}{12} + \frac{a_1}{12} = \frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12}$$
$$a_5 = \frac{a_3}{20} + \frac{a_2}{20} = \frac{a_0}{30} + \frac{a_1}{120}, \ldots\ldots\ldots$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

إذن:

$$w = a_0\left[1 + \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{6} + \frac{(z-1)^4}{24} + \frac{(z-1)^5}{30} + \ldots\ldots\right]$$

$$+a_1\left[(z-1)+\frac{(z-1)^3}{6}+\frac{(z-1)^4}{12}+\frac{(z-1)^5}{120}+\ldots\right]$$

ونلاحظ في هذا المثال أن العلاقة التكرارية التي تعطي $a_n$ بدلالة $a_0$ و $a_1$ غير واضحة. في مثل هذه الحالات يكن أن نثبت أن المتسلسلة متقاربة من أجل كل قيم $z$.

أما $w_1$ و $w_2$ فهما حلان مستقلان خطياً لمعادلة آيري. إذن:

$$w = a_0 w_1 + a_2 w_2$$

هو الحل العام لمعادلة آيري من أجل: $-\infty < z < \infty$.

— **مثال (٤):**

معادلة هرميت. (Hermit Eq) هي:

$$w'' - 2zw' + \lambda w = 0 \quad , \quad -\infty < z < \infty$$

حيث $\lambda$ ثابت موجب.

أوجد متسلسلة الحل لهذه المعادلة في جوار الصفر.

**الحل:**

لإيجاد حل هذه المعادلة على شكل متسلسلة قوى حول النقطة العادية $z = 0$ نفرض الحل على الشكل:

$$w=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \Rightarrow w'=\sum_{n=0}^{\infty}na_n z^{n-1} \Rightarrow w''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n z^{n-2}$$

بالتعويض عن ذلك في المعادلة المفروضة نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n-\sum_{n=1}^{\infty}2na_n z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_n z^n=0$$

أو:

$$(2a_2+\lambda a_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-2na_n+\lambda a_n\right]z^n=0$$

إذن: $a_2 = -\frac{\lambda a_0}{2}$ والعلاقة التكرارية العامة هي:

$$a_{n+2} = \frac{2n-\lambda}{(n+2)(n+1)} a_n \quad ; \; n \geq 1$$

وواضح من هذه العلاقة أن $a_0$ يعين $a_2$ الذي هو بدوره يعين $a_4$ وهكذا دواليك.. بالمثل بالنسبة للمعاملات لقوى z الفردية التي تعين بدلالة $a_1$.

وتكون متسلسلة الحل لمعادلة هرميت على الشكل:

$$w = a_0\left[1-\frac{\lambda}{2!}z^2-\frac{(4-\lambda)\lambda}{6!}z^6\ldots\ldots\right]$$
$$+a_1\left[z+\frac{2-\lambda}{3!}z^3+\frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}z^5+\frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!}z^7+\ldots.\right]$$
$$= a_0 w_1(z) + a_1 w_2(z)$$

كذلك يمكن أن نثبت أن المتسلسلة متقاربة من أجل جميع قيم z.

إذا كان $\lambda$ عدداً زوجياً غير سالب فتكون إحدى هاتين المتسلسلتين منتهية وعلى الخصوص من أجل $\lambda = 0, 2, 4, 6, \ldots$ فإن إحدى حلول معادلة هرميت:

$$1 \;,\; z \;,\; 1-2z^2 \;,\; z-\frac{2}{3}z^3.$$

الحل على شكل كثير حدود يقابل $\lambda = 2n$. وبعد ضربه في عدد ثابت يصبح يسمى بكثير حدود هرميت: $H_n(z)$.

**مثال (٥):**

أوجد مجال تقارب متسلسلة الحل حول $z = 0$ لمعادلة ليجندر:

$$(1-z^2)\,w'' - 2zw' + \lambda\,(\lambda+1)\,w = 0$$

حيث $\lambda$ ثابت.

الحل:

نلاحظ أن المعادلة تكتب على الشكل: $P(z)\, w'' + Q(z)\, w' + R(z)\, w = 0$

حيث: $P(z) = 1 - z^2$، $Q(z) = -2z$، $R(z) = \lambda(\lambda + 1)$. وصفرا للدالة P هما: $\pm 1$ أي إن المسافة بينهما والمركز $z = 0$ هي 1 إذن المتسلسلة:

$$w = \sum_n a_n z^n$$

متقاربة من أجل $|z| < 1$ على الأقل كما هو محتمل من أجل قيم z ويمكن أن نثبت أيضاً في حالة $\lambda$ عدد موجب وصحيح أن إحدى متسلسلتي الحل منتهية ومن ثمّ فهي متقاربة من أجل جميع قيم z.

مثال: في حالة $\lambda = 1$، الحل هو: $w = z$.

سنعود فيما بعد لدراسة هذه المعادلة بالتفصيل.

**مثال (٦):**

أوجد مجال تقارب متسلسلة الحل للمعادلة التفاضلية:

$$(1 + z^2)\, w'' + 2z\, w' + 4z^2\, w = 0$$

حول النقطة $z = 0$ وحول النقطة $z = -1/2$.

**الحل:**

لدينا: $P(z) = 1 + z^2$ , $Q(z) = 2z$ , $R(x) = 4z^2$ وتنعدم الدالة P من أجل $z = i, -i$.

المسافة في المستوى المركب من o إلى $\pm i$ هي 1 ومن $-1/2$ إلى $\pm i$ هي: $\sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

إذن في الحالة الأولى المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ متقاربة على الأقل من أجل $|z| < 1$.

وفي الحالة الثانية المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z+1/2)^n$ متقاربة على الأقل من أجل $|z+1/2| < \frac{\sqrt{5}}{2}$.

**ملاحظة:**

إذا فرضنا أن للمعادلة التفاضلية السابقة شروطاً ابتدائية:

$$w(0) = w_0 \ , \ w'(0) = w'_0$$

وبما أن $1 + z^2 \neq 0$. من أجل جميع قيم z، وبناء على مبرهنة وجود ووحدانية الحل فإن لهذه المعادلة حلاً وحيداً يحقق الشروط الابتدائية على المجال $-\infty < z < \infty$.

من جهة أخرى المبرهنة السابقة تضمن لنا حلاً على شكل متسلسلة قوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ من أجل: $-1 < z < 1$.

إذن الحل الوحيد على المجال $-\infty < z < \infty$. ليس له متسلسلة قوى حول $z = 0$ التي تتقارب من أجل جميع قيم z.

**مثال (٧):**

هل يمكن تعيين متسلسلة الحل حول $z = 0$. للمعادلة التفاضلية:

$$w'' + (\sin z)\, w' + (1 + z^2)w = 0$$

وإذا كان ممكناً فما هو نصف قطر التقارب.

**الحل:**

في هذه المعادلة لدينا: $Q(z) = 1 + z^2$ , $P(z) = \sin z$، وبما أن الدالة $P(z) = \sin z$ يمكن أن تكتب على شكل متسلسلة تيلور حول النقطة $z = 0$ وهي متقاربة من أجل جميع قيم z.

أيضاً: الدالة $Q(z) = 1 + z^2$ يمكن أن تكتب على شكل متسلسلة تيلور حول النقطة $z = 0$ وهي متقاربة من أجل جميع قيم z.

إذن وفق المبرهنة السابقة فإن للمعادلة متسلسلة حل من الشكل:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

حيث $a_1, a_0$ ثابتان اختياريان والمتسلسلة متقاربة من أجل جميع قيم z.

**مثال (٨):**

حل مسألة القيم الابتدائية التالية على شكل متسلسلة قوى حول النقطة $z = 1$.

وأوجد نصف قطر تقارب هذا الحل:

$$(z^2 - 2z + 2)\, w'' + 2(z-1)\, w' = 0$$

$$w(1) = 1 \;;\; w'(1) = \frac{4}{\pi}$$

**الحل:**

لدينا: $Q(z) = 0$ ، $$P(z) = \frac{2(z-1)}{z^2 - 2z + 2} = \frac{2(z-1)}{(z-1)^2 + 1}$$

وواضح أن $P(z)$، $Q(z)$ تحليليتان عند $z = 1$. ومن ثمَّ فالنقطة $z = 1$ هي نقطة عادية ويمكن كتابة الحل على شكل متسلسلة قوى بقوى $z - 1$. ولحساب نصف قطر التقارب نوجد أقرب نقطة شاذة للنقطة العادية $z = 1$. وواضح أن $P(z) = \infty$ إذا كان $(z-1)^2 = -1$ أي إذا كان $z = 1 \pm i$ وهاتان النقطتان الشاذتان متساويتا البعد عن النقطة $z = 1$. حيث هذا البعد يساوي الوحدة. وعلى ذلك يكون $R_c = 1$ مما

يعني أن متسلسلة الحل تتقارب في المجال $|z-1| < 1$. وسنستخدم طريقتين للحصول على هذا الحل:

**الطريقة الأولى:**

ننقل المحاور إلى النقطة $z = 1$ عن طريق التعويض $z = t + 1$ وعلى ذلك تصبح:

$$\frac{d^2}{dz^2} = \frac{d^2}{dt^2} \ , \ \frac{d}{dz} = \frac{d}{dt}$$

وتؤول المعادلة المفروضة إلى:

$$[(t+1)^2 - 2(t+1) + 2]\, w'' + 2tw' = 0$$

أو:

$$(t^2+1)w'' + 2tw' = 0$$

حيث الاشتقاق الآن بالنسبة إلى $t$. نفرض الحل على شكل متسلسلة قوى:

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \Rightarrow w'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \Rightarrow w''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

بالتعويض في المعادلة .وتجميع الحدود المتشابهة نحصل على:

$$\sum n(n+1)a_n t^n + \sum n(n-1)a_n t^{n-2} = 0$$

لحساب معامل $t^n$ نغير في المجموع الثاني $n \to n+2$ ثم نساوي هذا المعامل بالصفر لنحصل على الصيغة التكرارية:

$$n(n+1)a_n + (n+1)(n+2)a_{n+2} = 0$$

إذن:

$$a_{n+2} = -\frac{n}{n+2} a_n \ , \ n \geq 0$$

ومنه:

$$n = 0 \ : \ a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = a_6 = a_8 = \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

$$n = 1 \ : \ a_3 = -\frac{1}{3} a_1$$

$$n=3 \;:\; a_5 = -\frac{3}{5}a_3 = +\frac{1}{5}a_1$$

$$n=5 \;:\; a_7 = -\frac{5}{7}a_5 = -\frac{1}{7}a_1$$

-------------------------------

إذن:

$$w(t) = a_0 + a_1\left(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \ldots\right)$$

أو:

$$w(t) = a_0 + a_1\left[(z-1) - \frac{1}{3}(z-1)^3 + \frac{1}{5}(z-1)^5 - \frac{1}{7}(z-1)^7 + \ldots\right]$$

لتعيين الثابتين الاختياريين $a_1, a_0$ سنستفيد من الشروط الابتدائية المفروضة:

$$w(1) = a_0 + a_1[0] = a_0 \equiv 1 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$w'(z)\big|_{z=1} = a_1\left[1-(z-1)^2+(z-1)^4-(z-1)^4-(z-1)^6+\ldots\right]_{z=1}$$

$$= a_1 \equiv \frac{4}{\pi} \Rightarrow a_1 = \frac{4}{\pi}$$

إذن:

$$w(z) = 1 + \frac{4}{\pi}\left[(z-1) - \frac{1}{3}(z-1)^3 + \frac{1}{5}(z-1)^5 - \frac{1}{7}(z-1)^7 + \ldots\right]$$

**٢ . ٦ . مبرهنة (٢):**

لتكن المعادلة: (i)

$$w'' + P(z)w' + Q(z)w = R(z)$$

إذا كانت الدوال $P(z)$، $Q(z)$، $R(z)$. دوال تحليلية عند النقطة $z = z_0$ فإن كل حل للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (i) يكون تحليلياً عند $z = z_0$ ويمكن من ثمَّ تمثيله بمتسلسلة قوى في $(z - z_0)$ على الشكل:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

بنصف قطر تقارب $R_c > 0$ يساوي المسافة بين النقطة العادية $z = z_0$ وأقرب نقطة شاذة تكون عندها أي من الدوال $P(z)$، $Q(z)$، $R(z)$ غير تحليلية.

وتتبع نفس الخطوات المتعلقة بحل المعادلة المتجانسة مع تعديل بسيط هو فك الدالة التحليلية $R(z)$ في الطرف الأيمن على شكل متسلسلة قوى في $(z - z_0)$ ثم مساواة معاملات القوى $(z - z_0)$ المتشابهة على الطرفين.

ويكون الحل العام على الشكل:

$$w(z) = a_0 w_1(z) + a_1 w_2(z) + w_3(z)$$

حيث $w_n(z) = a_0 w_1(z) + a_1 w_2(z)$ هو الحل المتجانس، $w_3(z)$ هو حل خاص. ويوضح ذلك المثال التالي:

**مثال محلول:**

حل المعادلة التفاضلية التالية حول $z = 0$ على شكل متسلسلة قوى:

$$w'' - zw' = e^{-z}$$

**الحل:**

لدينا:

$$P(z) = -z\,,\ Q(z) = 0\,,\ R(z) = e^{-z} = \sum_{n=\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}$$

وكلها دوال تحليلية عند جميع قيم $z$ بما فيها $z = 0$. وعلى ذلك يكون الحل على شكل متسلسلة قوى تتقارب لجميع قيم $z$. إذن:

$$w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \Rightarrow w'=\sum_{n=0}^{\infty}na_n z^{n-1} \Rightarrow w''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n z^{n-2}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n z^{n-2}-z\sum_{n=0}^{\infty}na_n z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n$$

أو:

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n z^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}na_n z^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n$$

ويلاحظ أننا مثلنا الدالة $e^{-z}$ بمتسلسلة تيلور حول $z=0$.

بمساواة معامل $z^n$ على الطرفين وذلك بعد تغيير $n \to n+2$ في المجموع الأول في الطرف الأيسر فنحصل على:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}-na_n=\frac{(-1)^n}{n!}$$

وتكون الصيغة التكرارية من الشكل:

$$a_{n+2}=\frac{n}{(n+2)(n+1)}a_n+\frac{(-1)^n}{(n+2)(n+1)(n!)} \quad , \quad n\geq 0$$

ومنها:

$$n=0 \quad , \quad a_2=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$n=1 \quad , \quad a_3=\frac{1}{2.3}a_1-\frac{1}{2.3}=\frac{a_1}{6}-\frac{1}{6}$$

$$n=2 \quad , \quad a_4=\frac{2}{3.4}a_2+\frac{1}{2.3.4}=\frac{1}{8}$$

$$n=3 \quad , \quad a_5=\frac{3}{4.5}a_3-\frac{1}{6.5.4}=\frac{a_1}{40}-\frac{1}{30}$$

-------------------------------

ويكون الحل كما يلي:

$$w = a_0 + a_1 z + \frac{1}{2}z^2 + \left(\frac{a_1}{6} - \frac{1}{6}\right)z^3 + \frac{1}{8}z^4 + \left(\frac{a_1}{40} - \frac{1}{30}\right)z^5 + \ldots$$

$$= \left\{a_0 + a_1\left[z + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{40}z^5 + \ldots\right]\right\} + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{3}z^5 \ldots$$

المقدار بين قوسين {....} هو الحل المتجانس بينما المتسلسلة الأخيرة تمثل حلاً خاصاً للمعادلة المفروضة.