نظري

◄ دكتور المادة: جبران جبران

◄المحاضرة الخامسة

عنوان المحاضرة: الفضاءات الطوبولوجية العامة

---

**المحتوى العلمي** : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

**١ـمراجعة لما سبق بالإضافة لأمثلة و تمارين عملية**

**٢ـمبرهنة (تقاطع جماعة من الطوبولوجيات على مجموعة غير خالية هو طوبولوجيا عليها)**

**٣ـالنقطة الداخلية و داخل مجموعة في فضاء طوبولوجي**

**٤ـتمرين**

---

## من محاضرات سابقة لنتذكر ما يلي:

- لتكن $X$ مجموعة غير خالية سندعو طوبولوجيا على $X$ كل صف $\tau \subseteq P(X)$ من المجموعات الجزئية من $X$ بشرط أن تحقق ما يلي :

١- $\emptyset, X \in \tau$

٢- $\forall A, B \in \tau \,;\, A \cap B \in \tau$

٣- اجتماع أي جماعة من عناصر $\tau$ هو عنصر من $\tau$

و قلنا أنه في هذه الحالة سندعو الثنائية $(X,\tau)$ فضاء طوبولوجي ، و أيضاً نعلم أنه إذا اختل أحد الشروط السابقة على الأقل فـ $\tau$ ليست بطوبولوجيا .

- و نذكر أيضاً أن المجموعات المفتوحة في فضاء طوبولوجي هي و فقط هي عناصر الطوبولوجيا $\tau$ أي : ( المجموعة $A$ مفتوحة $\Leftrightarrow A \in \tau$)
- و أيضاً كنا قد عرّفنا **الطوبولوجيا التافهة** على أي مجموعة غير خالية $X \neq \emptyset$ بالشكل $\tau = \{\emptyset, X\}$ و يكون $(X,\tau)$ فضاء طوبولوجي تافه (إن الطوبولوجيا التافهة هي أصغر طوبولوجيا يمكن تعريفها على $X$)
- كما تعرفنا على **الطوبولوجيا المتقطعة** و قلنا أنه إذا كانت $X \neq \emptyset$ فإننا نعرف الطوبولوجيا المتقطعة بأنها مجموعة أجزاء $X$ أي $\tau = P(X)$ و قلنا أن $\big(X, P(X)\big)$ فضاء طوبولوجي متقطع

## ولنكمل الآن في بعض الأمثلة الأخرى:

مثال ١ : لتكن $X \neq \emptyset$ و لتكن $\tau = \{X\}$ فنلاحظ هنا أنّ $\tau$ لا تشكل طوبولوجيا على $X$ لأن $\emptyset \notin \tau$

مثال ٢: لتكن $X = \{a, b\}$ و $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ ، إن $\tau$ طوبولوجيا على $X$ لتحقق الشروط الثلاث "تحقق من ذلك"

مثال ٣ : لتكن $X = \{a, b, c\}$ و $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$ ، هنا الشرط الأول محقق فكلاً من $\emptyset$ و $X$ ينتمي لـ $\tau$ ، إلا أن الشرط الثالث غير محقق (شرط الاجتماع) لأنه لدينا $\{a\}, \{b\} \in \tau$ لكن $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \tau$ ، بما أن أحد الشروط غير محقق فإن $\tau$ ليست طوبولوجيا على $X$

تمرين (وظيفة) : أوجد كل طوبولوجيا يمكن تعريفها على المجموعة $X = \{a, b\}$

الحل :

$$\tau_1 = \{\emptyset, X\}$$
$$\tau_2 = P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$$
$$\tau_3 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$$
$$\tau_4 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$$

مثال ٤: لنأخذ $X = \mathbb{N}$ و لنفرض أن $\tau$ مجموعة كل المجموعات المنتهية في $\mathbb{N}$ ، إن $\tau$ لا تشكل طوبولوجيا على $X$ ذلك لأن $X \notin \tau$ ((لأنها ليست منتهية)).

مثال ٥: لنأخذ $X = \mathbb{R}$ و لنأخذ $\tau$ مجموعة كل المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$ ، إن $\tau$ هنا أيضاً لا تشكل طوبولوجيا ذلك لأن اجتماع مجالات مفتوحة ليس بالضرورة أن يكون مجالاً مفتوحاً .. خذ مثلاً المجالين $]2,5[\,,\,]7,10[$ اجتماعهما ليس مجالاً مفتوحاً أي أن $\tau$ ليست مغلقة للاجتماع .

في الفضاء الطوبولوجي : المجموعات المفتوحة هي و فقط هي عناصر الطوبولوجيا $\tau$ و متمماتها هي المجموعات المغلقة

**تمرين :** لتكن $X$ مجموعة غير منتهية و لتكن $\tau$ مؤلفة من المجموعة الخالية و كل المجموعات الجزئية في $X$ التي متمماتها منتهية ، أثبت أن $(X,\tau)$ فضاء طوبولوجي

**الحل :** لدينا $\tau = \{\emptyset\} \cup \{A : A \subseteq X ,\ A^c\ \text{منتهية}\}$

١- $\emptyset \in \tau$ فرضاً
و أيضاً $X \in \tau$ لأن متممتها $X^c = \emptyset$ مجموعة منتهية

٢- ليكن $A, B \in \tau$ و لنميز حالتين :
- إذا كان $A \cap B = \emptyset$ فإن $A \cap B \in \tau$
- إذا كان $A \cap B \neq \emptyset$ ، فبما أن $A, B \in \tau$ يكون كل من $A^c, B^c$ مجموعة منتهية و أنّ:

$$(A \cap B)^c = \underbrace{A^c \cup B^c}_{\text{اجتماع منتهيتين هو منتهية}} \Longrightarrow A \cap B \in \tau$$

٣- علينا إثبات أنه إذا كان $A_i$ حيث $i \in I$ جماعة من عناصر $\tau$ فإن $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ و أيضاً سنميز حالتين :
-إذا كان $\bigcup_{i\in I} A_i = \emptyset$ فإن $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$
-إذا كان $\bigcup_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ فإنه يوجد $i_0 \in I$ بحيث $A_{i_0} \neq \emptyset$ (و هي عنصر من $\tau$) إذاً متممتها مجموعة منتهية :

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \subseteq A_{i_0}^c \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$$

**ولنفسر قليلاً ما سبق :**

إذا كان الاجتماع غير خالي فحتماً أحد عناصر هذا الاجتماع على الأقل هي مجموعة غير خالية و لتكن $A_{i_0}$ ، إن $A_{i_0}$ هي عنصر من $\tau$ و بالتالي متممتها منتهية أي أن المجموعة $A_{i_0}^c$ منتهية ،

الآن نحن نريد اثبات أن الاجتماع هو عنصر من $\tau$ و بالتالي سنحاول اثبات أن متمم الاجتماع هو مجموعة منتهية فأخذنا المتممة $(\bigcup_{i\in I} A_i)^c$ و التي نعلم أنها تساوي إلى $\bigcap_{i\in I} A_i^c$ ،
إن هذا التقاطع هو العناصر المشتركة بين كل حدوده و بالتالي عناصر التقاطع تنتمي لكل حد من حدود التقاطع و لا سيما $A_{i_0}^c$ و بالتالي وجدنا أن $(\bigcup_{i\in I} A_i)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \subseteq A_{i_0}^c$
و الأخيرة تدل على أن متمم الاجتماع محتوى في مجموعة منتهية فالمتمم منتهية و بالتالي الاجتماع هو عنصر من $\tau$.

**مبرهنة :** لتكن $\{\tau_i \ : i \in I\}$ جماعة من الطوبولوجيا على $X$ عندئذٍ $\bigcap_{i\in I}\tau_i$ تشكل طوبولوجيا على $X$.

**البرهان :** نريد إثبات أن $\tau = \bigcap_{i\in I}\tau_i$ تشكل طوبولوجيا على $X$ :

- بما أن كل $\tau_i$ هي طوبولوجيا أياً كانت $i \in I$ فإن :

$$\emptyset, X \in \tau_i \quad , \forall i \in I \Longrightarrow \emptyset, X \in \bigcap_{i\in I}\tau_i = \tau$$

فالشرط الأول محقق ☺

- لنثبت أن $\tau$ مغلقة للتقاطع :

$$\forall A, B \in \tau = \bigcap_{i\in I}\tau_i \Rightarrow A, B \in \tau_i$$

لكن $\tau_i$ طوبولوجيا و بالتالي $A \cap B \in \tau_i$ لكل $i \in I$ و منه ينتج أن :

$$A \cap B \in \bigcap_{i\in I}\tau_i = \tau$$

فالشرط الثاني محقق ☺

- بقي أن نثبت أن $\tau$ مغلقة للاجتماع أي علينا اثبات أن:

$$\forall A_j \in \bigcap_{i\in I}\tau_i \ : j \in J \ ; \bigcup_{j\in J} A_j \in \bigcap_{i\in I}\tau_i = \tau$$

لدينا $A_j \in \bigcap_{i\in I}\tau_i$ و بالتالي $A_j \in \tau_i : \forall i \in I, j \in J$
و لما كانت $\tau_i$ طوبولوجيا فإنها مغلقة للاجتماع و بالتالي $\bigcup_{j\in J} A_j \in \tau_i \ : \forall i \in I$ و منه ينتج مباشرةً أن: $\bigcup_{j\in J} A_j \in \bigcap_{i\in I}\tau_i = \tau$ فالشرط الثالث محقق ☺

مما سبق نجد أن $\bigcap_{i\in I}\tau_i = \tau$ تشكل طوبولوجيا على $X$ .

**ملاحظة :** اجتماع طوبولوجيات ليس بالضرورة أن يشكل طوبولوجيا .

**مثال :** لتكن $X = \{a, b, c\}$ و لنأخذ $\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ و أيضاً $\tau_2 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$ ، من السهولة التحقق أن كلاً من $\tau_1, \tau_2$ يشكل طوبولوجيا على $X$ إلا أنّ اجتماعهما $\tau_1 \cup \tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$ لا يشكل طوبولوجيا لأنه ليس مغلق للاجتماع حيث نلاحظ أن :

$\{a\},\{b\} \in \tau_1 \cup \tau_2$ إلا أن $\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$ ...و في ذلك مثال معاكس يوضح أن اجتماع طوبولوجيات ليس بالضرورة أن يكون طوبولوجيا .

**النقطة الداخلية :** ليكن $(X,\tau)$ فضاء طوبولوجي و $A \subseteq X$ ، نقول عن $x \in A$ إنها نقطة داخلية في $A$ إذا وجدت مجموعة مفتوحة في $(X,\tau)$ تحوي $x$ محتواة في A

أي ( $x$ نقطة داخلية في $A$ ) $\Leftrightarrow \exists B \in \tau \;\; : x \in B \subseteq A$

و نرمز لمجموعة النقاط الداخلية في $A$ بالرمز $A^\circ$ أو $(int\ A)$ .

قولنا أن $B \in \tau$ هذا يكافئ قولنا أن $B$ مجموعة مفتوحة لأنه تعريفاً تكون المجموعة في فضاء طوبولوجي مفتوحة إذا كانت عنصراً من الطوبولوجيا

**مثال :** لنأخذ $X = \{a,b,c,d,e\}$ و $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ ، أوجد داخل المجموعات التالية :

$$A = \{a,b\}, B = \{c\}, K = \{b,c\}$$

**الحل :** نلاحظ أن τ تشكل طوبولوجيا على $X$ و لنبدأ بالحل :

- لنبدأ بالمجموعة $A = \{a,b\}$ :
  - من أجل العنصر $a$ :
    إن المجموعات المفتوحة في الفضاء $(X,\tau)$ هي عناصر $\tau$ أي هي المجموعات $\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$: ، و بالتالي المجموعات المفتوحة التي تحوي العنصر $a$ هي المجموعات $\{a\}, \{a,b,c\}, X$ بقي أن نحدد من هي المجموعات التي تحوي الـ $a$ تحقق أنها محتواة في $A$ فنجد أن المجموعة المفتوحة $\{a\}$ تحقق أن $a \in \{a\} \subseteq A$ و بالتالي النقطة $a$ داخلية في $A$ أي $\boxed{a \in A^\circ}$
  - من أجل العنصر $b$ :
    المجموعات المفتوحة التي تحوي العنصر $b$ هي المجموعات $X, \{b,c\}, \{a,b,c\}$ و لكن أياً منها ليست محتواة في $A$ إذاً b ليست داخلية في $A$ أي $\boxed{b \notin A^\circ}$

مما سبق نجد أن $\boxed{A^\circ = \{a\}}$

- المجموعة $B = \{c\}$ : و هي مجموعة وحيدة العنصر تحوي العنصر $c$ و المجموعات المفتوحة التي تحوي العنصر $c$ هي المجموعات $X, \{b, c\}, \{a, b, c\}$ ولا يوجد بينها مجموعة محتواة في $B$ إذاً $c \notin B^{\circ}$ و بالتالي $\boxed{B^{\circ} = \emptyset}$
- المجموعة $K = \{b, c\}$ :

* من أجل العنصر b : المجموعات المفتوحة التي تحوي العنصر $b$ هي المجموعات $X, \{b, c\}, \{a, b, c\}$ و المحتواة في $K$ منها هي المجموعة $\{b, c\} \subseteq K$ و بالتالي $b$ نقطة داخلية في $K$

*من أجل العنصر $c$ : و المجموعات المفتوحة التي تحوي العنصر $c$ هي المجموعات $X, \{b, c\}, \{a, b, c\}$ و توجد المجموعة $\{b, c\}$ تحقق أنها محتواة في $K$ ، إذاً $c$ داخلية في $K$.

$$\boxed{K^{\circ} = K}$$

**انتهت المحاضرة**

---

| | | |
|---|---|---|
| صفحتنا على فيسبوك:<br>IOM<br>الرابط :<br>facebook.com/MathemagicTeam/ | مجموعة السنة الثانية :<br>Improve Our Mathematics | مجموعة السنة الأولى:<br>طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات في جامعة دمشق ٢٠١٧ |

إعداد: عبد الرحمن البحش – شهناز طاطيش – نذير تيناوي