28-4-2017

نظري

◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة الثامنة

عنوان المحاضرة: دراسة حركة نقطة مادية بوجود احتكاك

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- حركة نقطة مادية بوجود احتكاك.

2-الحركة المركزية لنقطة مادية.

حركة نقطة مادية بوجود احتكاك

عند دراسة حركة نقطة مادية على منحني ثابت بوجود احتكاك فإن رد الفعل لن يكون ناظمياً على المنحني ((أي أن رد الفعل يصنع زاوية على المستوي الناظمي)) وتسمى بزاوية الاحتكاك.

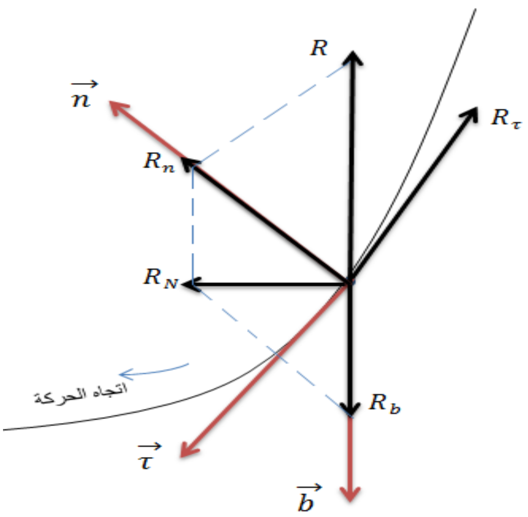
وبذلك يكون لرد الفعل مركبة مماسية R_τ محمولة على المماس وأخرى ناظمية R_N موجودة في المستوي الناظمي للمنحني في تلك النقطة .

ويمكن تفرق المركبة R_N إلى مركبتين $R_N = R_n + R_b$

حيث R_n على الناظم الأساسي و R_b محمولة على ثنائي الناظم.

وبالتالي حسب قانون التحريك الأساسي $m\ \vec{\Gamma} = \vec{F}$

يكون لدينا بالإسقاط ...



بالإسقاط على $\vec{\tau}$ نجد

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau + R_\tau \ldots\ldots(1)$$

بالإسقاط على $\vec{n}$ نجد

$$m\frac{v^2}{\rho} = F_n + R_n \ldots\ldots(2)$$

بالإسقاط على $\vec{b}$ نجد

$$0 = F_b + R_b \ldots\ldots(3)$$

ملاحظة : عندما لا يوجد احتكاك $((\theta = 0))$ يكون رد الفعل ناظمي والمركبة المماسية تساوي الصفر.

أما عند وجود الاحتكاك تكون المركبة المماسية R_τ محمولة على المماس وتعاكسه باتجاه الحركة .

وتعطى بالقانون ... $R_\tau = f|R_N|$

حيث : f عامل الاحتكاك ، وبالتالي $|R_N| = \sqrt{R_2^2 + R_b^2}$

من المعادلة (2) نجد... $R_n = \frac{mv^2}{\rho} - F_n \Longrightarrow R_n^2 = \left(\frac{mv^2}{\rho} - F_n\right)^2$

من المعادلة (3) نجد... $R_b = -F_b \Longrightarrow R_b^2 = F_b^2$

نعوض بالمعادلة (1) فنجد...

$$\left\{\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F_\tau - f\sqrt{\left(\frac{mv^2}{\rho} - F_n\right)^2 + F_b^2} \\ \frac{mv^2}{\rho} &= F_n + R_n \\ 0 &= F_b + R_b \end{aligned}\right.$$

وهي معادلات الحركة في حالة منحني ثابت وخشن (غير أملس)

ملاحظة : إذا كانت الحركة في المستوي نستخدم المعادلتين (1) و (2).

الحركة المركزية لنقطة مادية

لتكن لدينا نقطة مادية M كتلتها m وتخضع لمجموعة من القوى محصلتها هي القوة $\vec{F}$ يمر خط تأثيرها من نقطة ثابتة (o) تدعى مثل هذه القوة بالقوة المركزية .

ومن دراسة العزم الحركي سابقاً وجدنا $\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ تتحقق هذه العلاقة إذا كانت : $F = 0$ مجموعة القوة المؤثرة تساوي الصفر أو $(\vec{r}//\vec{F})$

((أي أن تأثير القوة يمر من المركز وتسمى قوة مركزية)) تكون لدينا

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{v}) = 0 \Longrightarrow \vec{r} \wedge m\vec{v} = const = c$$

ملاحظة : إن مسار هذه النقطة الخاضعة لتأثير قوة مركزية تكون واقعة في مستوي وتكون خاضعة لقانون السطوح!!!

قانون السطوح

يعطى بالعلاقة $|\vec{r} \times \vec{v}| = r^2\frac{ds}{dt} = c = const$ أو $r^2\varphi' = c$

حيث $\left(\frac{ds}{dt}, \varphi'\right)$ رمزان يعبران عن السرعة السطحية.

((إذا كانت السرعة السطحية ثابتة في المستوي تكون النقطة خاضعة لقانون السطوح))
وبالتالي بما أن الحركة في حالة القوة المركزية حركة مستوية والقوة المركزية منطبقة على نصف القطر الشعاعي بالنقطة المادية فإنه من الأسهل بأن نأخذ الإحداثيات القطبية (r,φ) .

دستور بينيه الأول :

$$\boxed{v^2 = c^2(u'^2 + u^2)}$$

حيث $u' = \frac{du}{d\varphi}$, $u = \frac{1}{r}$ علما أن r هو نصف قطر الشعاع
وهنا اشتقينا u بالنسبة للزاوية (φ)

دستور بينيه الثاني :

$$\boxed{\Gamma = -c^2u^2(u'' + u)}$$

u تعطي مسار النقطة المادية و $\frac{d2u}{d\varphi^2} = u''$ الاشتقاق بالنسبة φ

بتعويض بالقانون الاساسي بالتحريك $F = m\Gamma$

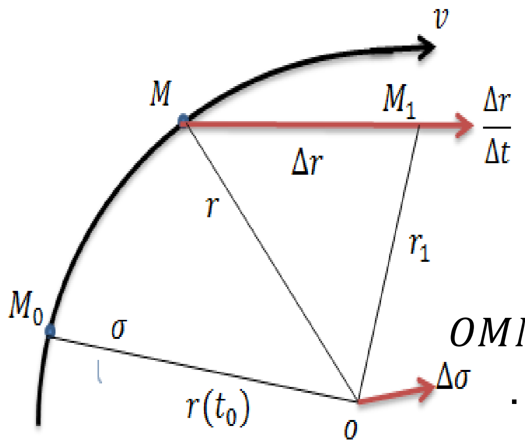
نجد $F = -mc^2u^2(u'' + u)$ وهي القوة المؤثرة على نقطة مادية

السرعة السطحية

لتكن M نقطة مادية تتحرك وفق المعادلات التالية :

$$x = x(t)\ ,\quad y = y(t)\quad ,\quad z = z(t)\quad ; r = r(t)$$

عندما يتحرك نصف قطر الشعاعي r المحدد لوضع نقطة مادية ثابتة في الفراغ فإنه يرسم مخروطاً يتم توجيهه بواسطة مسار النقطة المتحركة .
نرمز لقيمة السطح OMM_0 المحدد بالمسار وبنصفي القطرين الشعاعيين $r(t), r(t_0)$
ونرمز له بالرمز σ ، لنفرض أن النقطة المتحركة كانت بالموضع M المحدد بنصف القطر الشعاعي r
أما في اللحظة الزمنية $(t + \Delta t)$ فلنفترض أنها وصلت إلى الموضع M_1 بنصف القطر الشعاعي r_1
عندئذٍ إذا كانت Δt صغيرة فأنه يمكن اعتبار تغير سطح $\Delta\sigma$ خلال الفترة Δt كشعاع يقدر بالسطح المستوي OMM_1
أي كشعاع طوله نصف سطح متوازي الأضلاع المنشأ على $r, \Delta r$.
أما اتجاهه يتحدد بالمساواة الشعاعية لجداء الشعاعين



$$\Delta\sigma = OMM_1 = \frac{1}{2}(r \times \Delta r)$$

وبالتالي نهاية نسبة التغير

$$\boxed{u = \frac{d\sigma}{dt} \quad \text{أو} \quad lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = \vec{u}}$$

بالإسقاط على الإحداثيات الديكارتية نحصل على مساقط السرعة السطحية $\vec{u}$.

$$2\vec{u} = 2\frac{d\sigma}{dt} = \vec{r} \times \vec{r_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

من المحدد نحصل على .... $2u_x = z'y - zy' \quad ,2u_y = z'x - zx' \quad ,2u_z = xy' - x'y$

وهي معادلات السرعة السطحية بالإحداثيات الديكارتية

سؤال على الفقرة السابقة ((أوجد معادلات السرعة السطحية بالإحداثيات الديكارتية))

في حالة خاصة إذا كانت نقطة مادية تتحرك في المستوي (oxy) وبالتالي إذا عوضنا $z = 0$ في هذه المعادلات نحصل على السرعة السطحية في هذا المستوي

مثال

أوجد القوة المركزية لنقطة مادية مسارها القطع المخروطي $r = \frac{P}{1+e\cos(\theta)}$

الحل

لإيجاد القوة المؤثرة نستخدم دستور بينيه الثاني : $F = -mc^2u^2(u'' + u)$

حيث : $u = \frac{1}{r} = \frac{1+e\cos(\theta)}{P}$

$$u' = -\frac{e\sin(\theta)}{P} \quad \Longrightarrow \quad u'' = -\frac{e\cos(\theta)}{P}$$

نعوض كل من $((u', u''))$ في قانون التحريك الأساسي

$$F = -mc^2\frac{(1+e\cos\theta)^2}{P^2}\left(-\frac{e\cos(\theta)}{P} + \frac{1+e\cos(\theta)}{P}\right)$$

$$F = -mc^2\frac{(1+e\cos\theta)^2}{P^2}\left(\frac{1}{P}\right)$$

وبما أن $u^2=\frac{(1+e.\cos\theta)^2}{P^2} \Longrightarrow u=\frac{1+e.\cos(\theta)}{P}$

$$F=-m.c^2.u^2\left(\frac{1}{P}\right)$$

ونعلم أيضاً أنَ : $u=\frac{1}{r} \Longrightarrow u^2=\frac{1}{r^2}$

وبالتالي : $\boxed{F=-m.\frac{c^2}{\rho r^2}}$

و هي القوَة المركزية التي تؤثر على النقطة المادية.

أدرس حركة نقطة مادية تخضع لقوة من الشكل(($F=-m\omega^2 r$))

هذه القوة مركزية جاذبة تتناسب طرداً مع بعد النقطة عن مركز الجذب .

حسب القانون الأساسي بالتحريك $m\,\vec{\Gamma}=\vec{F}$

بالإسقاط نجد.... $m\frac{d2r}{dt^2}=-m\omega^2 r$

بالتقسيم على m فنحصل على:

$$\frac{d2r}{dt^2}=-\omega^2 r \Longrightarrow r''+\omega^2 r=0 \dots\dots\dots(1)$$

و هي معادلة تفاضلية ذات أمثال ثابتة دون طرف ثاني، حلها العام من الشّكل:

$$r=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$$

حيث: λ_1,λ_2 هما جذرا المعادلة و c_1,c_2 ثوابت التكامل

لإيجاد المعادلة المميزة نفرض أنَّ: $r=e^{\lambda t}$

$$r'=\lambda e^{\lambda t} \Longrightarrow r''=\lambda^2 e^{\lambda t}$$

نعوِّض في (1) فنجد.... $\lambda^2e^{\lambda t}+\omega^2e^{\lambda t}=0$

نقسِّم على $e^{\lambda t}$ فنجد....

$$\lambda^2+\omega^2=0 \Longrightarrow \lambda^2=-\omega^2 \Longrightarrow \lambda=\pm i\omega$$

نعو ض فنجد $r=c_1e^{i\omega t}+c_2e^{-i\omega t}$

نعلم أنَ: $\boxed{e^{i\omega t}=\cos(\omega t)+i\sin(\omega t) \quad , \quad e^{-i\omega t}=\cos(\omega t)-i\sin(\omega t)}$

ومنه $r = c_1[cos(\omega t) + i\,sin(\omega t)] + c_2[cos(\omega t) - i\,sin(\omega t)]$

$$r = (c_1 + c_2)\,cos(\omega t) + i(c_1 - c_2)\,sin(\omega t)$$

نفرض أن: $B = i(c_1 - c_2)$ و $A = c_1 + c_2$

وبذلك: $r = A\,cos(\omega t) + B\,sin(\omega t) \ldots\ldots\ldots (2)$

لتعيين A, B من شروط البدء: $((r = r_0\,, r' = r'_0\,,\ \ t = 0\,))$

نشتق العلاقة (2) فنجد

$$r' = -A\omega\,sin\,\omega t + B\omega\,cos\,\omega t$$

وبتعويض شروط البدء نجد ....

$$r'_0 = B\omega \implies \boxed{B = \frac{r'_0}{\omega}}$$

لإيجاد A نعوِض شروط البدء في (2) فنجد .. $\boxed{A = r_0}$

نعوِض (A) و(B) في (2) وبذلك نحصل على:

$$r = r_0\,cos(\omega t) + \frac{r'_0}{\omega}sin(\omega t)$$

وهو الحل العام

حيث: r_0 هو نصف القطر الشّعاعي و r'_0 هي سرعته في تلك اللحظة.

لمعرفة المسار، نسقط على مِحْوَرَيْن (x, y) موازيين للمحورين (r_0, r'_0):

$$x = r_0\,cos(\omega t) \implies cos(\omega t) = \frac{x}{r_0} \ldots\ldots\ldots (\$)$$

$$y = \frac{r'_0}{\omega}sin(\omega t) \implies sin(\omega t) = \frac{y}{\frac{r'_0}{\omega}} \ldots\ldots\ldots (\$\$)$$

نربع ($) و ($$) ونجمعهما :

$$cos^2(\omega t) + sin^2(\omega t) = \frac{x^2}{{r_0}^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{r'_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{{r_0}^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{r'_0}{\omega}\right)^2} = 1}$$

وهي معادلة قطع ناقص

أدرس حركة نقطة مادية تخضع لقوة من الشكل (($F = m\omega^2 r$))

وهي قوة مركزية دافعة تتناسب طرداً نص القطر الشعاعي

$$m\frac{d2r}{dt^2} = m\omega^2 r \Longrightarrow \frac{d2r}{dt^2} = \omega^2 r$$

$$r'' = \omega^2 r \Longrightarrow r'' - \omega^2 r = 0 \ldots . (*)$$

وهي معادلة تفاضلية ذات أمثال ثابتة دون طرف ثاني حلها العام من الشكل:

$$r = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

حيث: λ_1, λ_2 هما جذرا المعادلة و c_1, c_2 ثوابت التكامل

لإيجاد المعادلة المميزة نفرض أنَّ: $r = e^{\lambda t}$

$$r' = \lambda e^{\lambda t} \Longrightarrow r'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

نعوِّض بالعلاقة $(*)$فنجد...

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - \omega^2 e^{\lambda t} = 0$$

نقسم على $e^{\lambda t}$ فنجد : $\lambda^2 - \omega^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm\omega$

وبالتالي: $r = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$

نعلم أن: $e^{\omega t} = ch(\omega t) + sh(\omega t) \quad , \quad e^{-\omega t} = ch(\omega t) - sh(\omega t)$

بالتعويض نجد..

$$r = c_1[ch(\omega t) + sh(\omega t)] + c_2[ch(\omega t) - sh(\omega t)]$$

$$r = (c_1 + c_2)\, ch(\omega t) + (c_1 - c_2)\, sh(\omega t)$$

نفرض أنَّ: $A = c_1 + c_2$ و $B = c_1 - c_2$

وبذلك: $r = A\, ch(\omega t) + B\, sh(\omega t) \ldots \ldots \ldots **$

لتعيين A, B من شروط البدء: $((r = r_0 \ , \ r' = r_0' \ , \ t = 0 \ ))$

بالاشتقاق .. $r' = A\omega\ sh(\omega t) + B\omega\ ch\,(\omega t)$

وبتعويض شروط البدء : $r_0' = B\omega \Longrightarrow B = \frac{r_0'}{\omega}$

لإيجاد A نعوِّض شروط البدء في ** فنجد ... $A = r_0$

بتعويض A, B في ** وبذلك نحصل على:

$$r = r_0\, ch(\omega t) + \frac{r'_0}{\omega}\, sh(\omega t)$$

و هو الحل العام لمعادلة القوة

بحيث r_0 نصف القطر الشعاعي للمتحرك في النقطة المادية في لحظة البدء.
r'_0 سرعته في تلك اللحظة.

ولمعرفة المسار نسقط على محورين (x, y) موازيين للمحورين (r_0, r'_0)، فنحصل على الشَّكلِ التَّالي:

$$x = r_0\, ch(\omega t) \Longrightarrow ch(\omega t) = \frac{x}{r_0}$$

$$y = \frac{r'_0}{\omega}\, sh(\omega t) \Longrightarrow sh(\omega t) = \frac{y}{\left(\frac{r'_0}{\omega}\right)}$$

نربع (x, y) ثم نطرح فنجد .....

$$\frac{x^2}{r_0^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{r'_0}{\omega}\right)^2} = 1$$

و هي معادلة قطع زائد

أدرس حركة نقطة مادية تخضع لقوة من الشكل(($F = -\frac{mk}{r^2}$))

هذه قوة مركزية جاذبة متناسبة عكساً مع مربع البعد.
حسب دستور بينيه الثاني ..

$$\Gamma = -c^2u^2(u'' + u)$$

بتعويض بقانون التحريك الاساسي نجد... $F = -mc^2u^2(u'' + u)$

$$-mc^2u^2(u'' + u) = -m\frac{k}{r^2} \quad ; \quad \frac{1}{r^2} = u^2$$

$$-mc^2u^2(u'' + u) = -m\,k\,u^2$$

$$c^2(u'' + u) = k \Longrightarrow u'' + u = \frac{k}{c^2} \ldots\ldots\ldots *$$

و هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة مع طرف ثاني.

الحل العام لها دون طرف ثان من الشكل: $u_1 = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}$

$$u'' + u = 0$$

لإيجاد المعادلة المميزة نفرض أنَّ: $u = e^{\lambda t}$

$$u_1' = \lambda e^{\lambda t} \Longrightarrow u_1'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

نعوض في (*) فنجد ..... $\lambda^2 e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = 0$

نقسم على $e^{\lambda t}$ فنجد:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \mp i$$

بتعويض : $u_1 = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}$

نعلم أنّ: $e^{it} = cos(\alpha) + i\,sin(\alpha) \ , \ e^{-it} = cos(\alpha) - i\,sin(\alpha)$

ومنه $u_1 = c_1[cos(\alpha) + i\,sin(\alpha)] + c_2[cos(\alpha) - i\,sin(\alpha)]$

بفرض $A = (c_1 + c_2) \ , \ B = i(c_1 - c_2)$

$$u_1 = A\,cos(\alpha) + B\,sin(\alpha)$$

نفرض $[A = a\,cos(\varphi) \, , \ B = -a\,sin(\varphi)]$

$$u_1 = a\,cos(\varphi)\,.\,cos(\alpha) - a\,sin(\varphi)\,.\,sin(\alpha)$$

تذكرة : $cos(a+b) = cos(a)\,.\,cos(b) - sin(a)\,.\,sin(b)$

$u_1 = a\,cos(\varphi + \alpha)$ وهو الحل العام دون طرف ثاني.

لنوجد الحل الخاص من الشكل $u_2 = \frac{k}{c^2}$ وهي عبارة عن ثابت من الشكل $u_2 = A$

بالاشتقاق $u_2' = 0 \Longrightarrow u_2'' = 0$

نعوض في $u'' + u = \frac{k}{c^2}$ فنجد:

$$0 + A = \frac{k}{c^2} \Longrightarrow A = \frac{k}{c^2} \Longrightarrow \boxed{u_2 = \frac{k}{c^2}}$$ وهو الحل الخاص

فأصبح الحل العام للمعادلة التفاضلية مع طرف ثان هو:

$$u = u_1 + u_2$$

$$u = a\cos(\varphi+\alpha) + \frac{k}{c^2} \qquad ; \qquad u = \frac{1}{r}$$

$$u = \frac{1}{r} = \frac{k}{c^2} + a\cos(\varphi+\alpha)$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية مع طرف ثاني، حيث a, α ثوابت التكامل.

إذا أخذنا المحور القطبي بحيث تكون $\alpha = 0$ نحصل على:

$$u = \frac{k}{c^2} + a\cos(\varphi)$$

بإخراج $\left(\left(\frac{k}{c^2}\right)\right)$ عامل مشترك نجد... $u = \frac{k}{c^2}\left(1 + \frac{a\,c^2}{k}\cos(\varphi)\right)$

وأيضاً يمكن أن نكتبه بالشكل:

$$\boxed{r = \frac{P}{1 + e\cos(\varphi)}}$$

r هو قانون قطع مخروطي ((دائرة - قطع مكافئ - ناقص - زائد -...))

حيث: $P = \frac{c^2}{k}$ وسيط المسار و $e = \frac{ac^2}{k}$ التباعد المركزي.

نميز الحالات:

إذا كان $1 < e$ فالمسار هو قَطع ناقص وإذا كانَ $e = 1$ فالمَسار هو قطع مكافِئ.

إذا كانَ $e > 1$ فالمسار هو قَطع زائد وإذا كان $e = 0$ فالمسار هو قطع دائرة.

وظيفة

1) يدور إلكترون حول نواة ذروته بمسار دائري وبسرعة ثابتة v أثرنا على هذا الإلكترون بقوة مماسية لمساره. **والمطلوب** عين السرعة الواجب تطبيقها لكي يفلت من جذب النواة.

2) برهن أنه إذا تحركت نقطة مادية على مسار دائري تحت تأثير قوة مركزية تتجه دوماً نحو محيط الدائرة فإن هذه القوة جاذبة تتناسب عكساً مع القوة الخاصة للبعد. $r = 2a\cos\theta$

" انتهت المحاضرة "

إعداد: محمد علي فليون ** رهف سليمان

تصويب خطأ في المحاضرة السابعة صفحة ((4))_

$N_\tau = 0$ لأن رد الفعل ناظمي ~~لكن~~ مثالي ومسقطه على المماس (($\vec{\tau}$)) يساوي الصفر

حل تمرين تم طرحهُ في مجموعتنا ^_^

لتكن M نقطة مادية كتلتها m تتحرك على المحور ox وتخضع لقوة جاذبة متناسبة عكساً مع مكعب البعد $F = -m\,\frac{k^2}{x^3}$.

1) أكتب المعادلة التفاضلية للحركة وحل هذه المعادلة ضمن شروط البدء:

$$t = 0 \quad , \quad x = a \quad , \quad x' = 0$$

2) ما هو الزمن اللازم لوصول النقطة للموضع o (مركز الإحداثيات) ؟

الحل:

$\overrightarrow{mg} = \vec{R}$ تنعدم بسبب الفعل ورد الفعل على المحور ox

حسب قانون التحريك الأساسي $m\,\vec{\Gamma} = \vec{F} + \overrightarrow{mg} + \vec{R} \Longleftarrow m\,\vec{\Gamma} = \sum \vec{F}$

بالإسقاط على المحور (ox).. $\boxed{x'' = -\frac{k^2}{x^3}} \Longleftarrow m\,x'' = -m\,\frac{k^2}{x^3} - mg + R \;\; ; R = mg$

و هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ولنحل هذه المعادلة نضرب الطرفين بـ $2x'$:

$$2\,x'\,x'' = -\frac{2x'\,k^2}{x^3}$$

بمكاملة الطرفين بالنسبة للزمن نجد :

$$\int 2\,x'\,x''.\,dt = \int -\frac{2x'\,k^2}{x^3}\,.\,dt$$

تذكرة : $\int f'(t).\,f^n(t).\,dt = \frac{f^{n+1}(t)}{n+1} + c_1$

$$x'^2 = \frac{k^2}{x^2} + c_1 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

لتعيين c_1 من شروط البدء (($t = 0 \quad x = a \quad x' = 0$))

بالتعويض في (1) نحصل على: $c_1 = -\frac{k^2}{a^2} \Longleftarrow 0 = \frac{k^2}{a^2} + c_1$

ومنه: $x'^2 = \frac{k^2}{x^2} - \frac{k^2}{a^2} \ldots\ldots\ldots (2)$

وبتوحيد المقامات نجد: $x'^2 = \frac{k^2(a^2-x^2)}{x^2\,a^2} \Longrightarrow x' = \mp\frac{k}{ax}\sqrt{a^2-x^2}$

نأخذ الإشارة السالبة لأن القوة جاذبة "تجذب القوة نحو المركز"

$$\Longrightarrow x' = -\frac{k}{ax}\sqrt{a^2-x^2}$$

لنحصل على x نكامل المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{dx}{dt} = -\frac{k}{ax}\sqrt{a^2-x^2}$

وهي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات:

وبفصل المتحولات نجد: $\frac{x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{k}{a}.dt$

نكامل الطرفين بعد أن نضرب ونقسم على (-2)

$$-\frac{1}{2}\int\frac{-2\,x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int -\frac{k}{a}.dt$$

تذكرة : $\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)}$

$$\boxed{-\sqrt{a^2-x^2} = -\frac{k}{a}t + c_2 \ldots\ldots\ldots (*)}$$

لتعيين c_2 من شروط البدء(($t=0\ ,x=a$)) نعوض في $(*)$ فنجد:

$$0 = 0 + c_2 \Longrightarrow c_2 = 0 \Longrightarrow \sqrt{(a^2-x^2\,)} = \frac{k}{a}\ t$$

نربع الطرفين: $x^2 = a^2 - \frac{k^2}{a^2}\ t^2 \Longleftarrow a^2 - x^2 = \frac{k^2}{a^2}\ t^2$

$$\boxed{x = \sqrt{a^2 - \frac{k^2}{a^2}t^2}}$$

وهو قانون الحركة

2) لإيجاد الزمن نربع علاقة قانون الحركة فنجد :

$$x^2 = a^2 - \frac{k^2}{a^2}t^2 \Longrightarrow \frac{k^2}{a^2}t^2 = a^2 - x^2$$

$$t^2 = \frac{a^2(a^2-x^2)}{k^2} \Longrightarrow t = \pm\sqrt{\frac{a^2(a^2-x^2)}{k^2}}$$

((وهنا أخذنا الحل الموجب لأن لا يمكن أن يكون الزمن سالب))

$$t = \sqrt{\frac{a^2(a^2-x^2)}{k^2}} \Longrightarrow t = \sqrt{\frac{a^2(a^2-0)}{k^2}} \Longrightarrow \boxed{t = \frac{a^2}{k}}$$