البنى الجبرية ٢

نظري

◄ دكتورة المادة: ريما الحاج خليفة

◄ المحاضرة: الخامسة ◄ عنوان المحاضرة: المثاليات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- تعريف المثاليات.

٢- مبرهنة تقول متى تكون المجموعة مثاليا يساريا .

٣- أمثلة عن المثاليات.

المثاليات

مقدمة في المثاليات :

تعريف:

لتكن $\mathcal{R}$ حلقة وَ A, B مجموعات جزئية غير خالية من $\mathcal{R}$ نعرف المجموع $A + B$ على الشكل التالي :

$$A + b = \{a + b; a \in A \ \text{وَ}\ b \in B\}$$

ونعرف الجداء $A.b$ على أنه المجموعة :

$$A.b = \{\sum a_i . b_j \ ; a_i \in A \, , b_j \in B\}$$

أي أن كل عنصر من المجموعة $A.B$ عبارة عن مجموع منتهٍ لمضاريب الأول فيها يكون عنصراً a من A والمضروب الثاني فيها يكون عنصراً bمن B .

- إذا كانت $A = \{a\}$ فإن : $A.B = a.B = \{a.b; b \in B \}$
- وإذا كانت $B = \{b\}$ فإن : $A.B = A.b = \{a.b; a \in A\}$

تعريف :

لتكن $\mathcal{R}$ حلقة وَ A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathcal{R}$ عندئذٍ:

١- نقول عن المجموعة A أنها مثالي يساري في $\mathcal{R}$ إذا حققت الشروط التالية :

- الثنائية $(A, +)$ تشكل زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{R}, +)$.
- $\forall r \in \mathcal{R}$ فإن $r.A \subseteq A$

٢- نقول عن المجموعة A أنها مثالي يميني في $\mathcal{R}$ إذا حققت الشروط التالية :

- الثنائية $(A, +)$ تشكل زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{R}, +)$.
- $\forall r \in \mathcal{R}$ أنها مثالية يمينية فإن $A.r \subseteq A$.

٣- نقول عن المجموعة A أنها مثالية (ثنائي الجانب) في $\mathcal{R}$ إذا كانت مثالياً يمينياً ويسارياً في آن واحد .

مبرهنة :

ليكن $\mathcal{R}$ حلقة و A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathcal{R}$ عندئذٍ الشرط اللازم والكافي لكي تكون المجموعة A مثالياً يسارياً في $\mathcal{R}$ هو أن يتحقق الشرطان التاليان :

- $\forall a,b\in A$ فإن $a-b\in A$
- $\forall r\in\mathcal{R} : \forall a\in A$ فإن $r.a\in A$

البرهان :

لزوم الشرط : بفرض أن A مثلياً يسارياً في $\mathcal{R}$ ولما كانت الثنائية $(A,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{R},+)$ (حسب التعريف السابق) فإن :

$\forall a,b\in A\,;a-b\in A$ ملاحظة : هذا الشرط اللازم والكافي لتكون A زمرة جزئية

اي أن الشرط الأول محقق .

ومن ناحية أخرى وحسب الشرط الثاني في تعريف المثالية اليسارية نرى أن الشرط الثاني محقق ايضاً .

$$\forall a\in A\,,r\in\mathcal{R}\,;r.Aa\in rA\subseteq A$$

وبهذا نكون قد أثبتنا الشرطين الموجودان في المبرهنة في حال A مثالية يسارية .

كفاية الشرط : لنثبت أن A مثلياً يسارياً في $\mathcal{R}$ (اي لنتحقق من الشرطين الموجودان في التعريف)

بما أن $\forall a,b\in A$ فإن $a-b\in A$ نجد أن الثنائية $(A,+)$ هي زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{R},+)$

وبالتالي الشرط الأول محقق .

بقي أن نثبت الشرط الثاني أن $ra\in A$ أو $rA\subseteq A$

سنثبت احتواء واحد فقط اي سنأخذ عنصر من rA ونثبت أنه موجود في A .

ليكن $x\in rA$ إذاً x عبارة عن مجموع منتهٍ **(التعريف بأول المحاضرة)** اي انه يأخذ الشكل

$x=\sum_{i=1}^{n} ra_i$ حيث $a_i\in A$ وذلك $\forall i=1,\dots\dots,n$

وبما أن $a\in A,r\in\mathcal{R}$ فإن $ra\in A$

$$\Longrightarrow ra_i\in A\,;\forall i=1,\dots\dots,n$$

وبما أن $(A,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{R},+)$ فهي مغلقة بالنسبة لعملية بالنسبة لعملية الجمع ومنه فإن

$$x=\sum_{i=}^{n} ra_i\in A\ \Longrightarrow rA\subseteq A$$

ومنه نجد أن الشرط الثاني محقق وبذلك يتم المطلوب .

ملاحظة : بنفس الطريقة نبرهن على المثالية اليمينية .

أمثلة :

١- في أي حلقة $\mathcal{R}$ كلاً من المجموعة $\{o\}$ من الحلقة $\mathcal{R}$ تشكل مثالياً في $\mathcal{R}$ ونسمي المثالي $\{o\}$ بالمثالي الصفري (التافه).

٢- ليكن $\mathcal{R}$ حلقة و $a\in\mathcal{R}$ والمجموعة معرفة على الشكل التالي :

$aR=\{a.r : r\in\mathcal{R}\}$ "برهن أنها مثالي يميني"

ويسمى المثالي اليميني الرئيسي المولد بالعنصر a

البرهان :

أولاً يجي أن نبرهن على أن هذه المجموعة غير خالية ثم نبرهن الشرطان اللذان وردا في المبرهنة السابقة .

لما كان $a \in a\mathcal{R}$ فإننا نجد أن $a\mathcal{R} \neq \emptyset$

ليكن $x, y \in a\mathcal{R}$ عندئذٍ يوجد عنصرين $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ حيث : $x = ar_1, y = ar_2$

$$xy = a(r_1 - r_2) \in a\mathcal{R}$$

هذا يعني أن $a\mathcal{R}$ تشكل زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{R}, +)$ $\Leftarrow$ الشرط الأول محقق ..

ليكن $z \in a\mathcal{R}$ وَ $r \in \mathcal{R}$ عندئذٍ يوجد $r_0 \in \mathcal{R}$ تحقق $z = ar_0$ $\Leftarrow$ $zr = (ar_0)r = a(r_0 r) \in \mathcal{R}$

$\Leftarrow$ الشرط الثاني محقق . وبالتالي فإن المجموعة $a\mathcal{R}$ مثالي يميني

٣- ليكن $\mathcal{R}$ حلقة و $a \in \mathcal{R}$ عندئذٍ المجموعة $\mathcal{R}a\mathcal{R} = \{\sum_{i=1}^{n} x_i a y_i : x_i, y_i \in \mathcal{R}\}$

برهن أن $\mathcal{R}a\mathcal{R}$ مثالي في $\mathcal{R}$.

نسمي المثالي الرئيسي المولد بالعنصر a .

البرهان :

نلاحظ أن $\mathcal{R}a\mathcal{R} \neq \emptyset$ وبالتالي لنتحقق من الشرطين

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i a y_i \ , \beta = \sum_{i=1}^{n} x_i' a y_i' \ : \ \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}a\mathcal{R}$$

وبحيث أن $x_i, x_i', y_i, y_i' \in \mathcal{R}$ عندئذٍ بما أن α, β عبارة عن مجاميع منتهية $\Leftarrow$ $\alpha - \beta \in \mathcal{R}a\mathcal{R}$ محققة لأنه

$$\alpha - \beta = \sum_{i=1}^{n} x_i a y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i' a y_i'$$

$$\alpha - \beta = \sum_{i=1}^{n} x_i a y_i + \sum_{i=1}^{n} (-x_i' a y_i')$$

لنثبت الشرط الثاني

$$r_1, r_2 \in \mathcal{R} \ : \ \forall \alpha \in \mathcal{R}a\mathcal{R}$$

$$r_1 a r_2 = \sum_{i=1}^{n} r_1 x_i a y_i r_2$$

وهو عبارة عن مجموع منتهٍ وأن $\mathcal{R}$ حلقة فهي مغلقة بالنسبة للضرب اي أن المجموع المنتهي يحقق الشرط الثاني $r_1 a r_2 \in \mathcal{R}a\mathcal{R}$

مما سبق نجد أن $\mathcal{R}a\mathcal{R}$ مثالي في$\mathcal{R}$. أي انه مثالي من اليمين ومن اليسار .

٤- لتكن $\mathcal{R}$ حلقة و $a \in \mathcal{R}$ عندئذٍ نبرهن أن المجموعة $r(a) = \{x : x \in \mathcal{R} \,;\, ax = 0\}$
تشكل مثالياً يمينياً في $\mathcal{R}$
ويسمى بالعادم اليميني للعنصر a في $\mathcal{R}$

البرهان :

بما أن $a.0 = 0 \Leftarrow 0 \in r(a)$ وبالتالي نجد أن $r(a)$ غير خالية

ليكن $x, y \in r(a)$ عندئذٍ : (الفكرة هنا اننا نريد أن نشكل الفرق ثم نرى هل بعد ضربهن من اليسار ب a سينتج الجواب صفر اذا كان صفر فإن الفرق ينتمي للمجموعة ومنه فهمي زمرة جزئية)

ولكن كل من x, y ينتميان للمجموعة فإن ضرب كل منهما ب a يساوي الصفر (هذا ما استخدمناه في البرهان)

$$a(x-y) = ax - ay = 0 - 0 = 0 \text{ محقق}$$

$$\Leftarrow x - y \in r(a)$$

ليكن $r \in \mathcal{R}$ عندئذٍ :

$$a(xr) = (ax)r = 0.r = 0 \text{ محقق}$$

$$\Leftarrow xr \in r(a)$$

وبالتالي المجموعة $r(a)$ تشكل مثالي يميني .

٥- ليكن $\mathcal{R}$ حلقة و $\mathcal{M}_2(\mathcal{R})$ حلقة المصفوفات هل المجموعة $\mathrm{I} = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathcal{R}\right\}$
هي مثالي(يميني او يساري) في الحلقة $\mathcal{M}_2(\mathcal{R})$.

البرهان :

بما أن $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$ فإن $I \neq \emptyset$

ليكن $\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} \in I$ $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{R}$:

فإن $\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & 0 \\ b_1 - b_2 & 0 \end{bmatrix} \in I$

أي أن الشرط الأول محقق .

ليكن $\begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ b_0 & 0 \end{bmatrix} \in I$ بحيث : $a_0, b_0 \in \mathcal{R}$

وليكن $\begin{bmatrix} x & y \\ z & r \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathcal{R})$ $x, y, z, r \in \mathcal{R}$: عندئذٍ :

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ b_0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 x & a_0 y \\ b_0 x & b_0 y \end{bmatrix} \notin I$$

أي أن الشرط الثاني غير محقق وبالتالي فإن المجموعة I ليست مثالية يمينية في الحلقة $\mathcal{M}_2(\mathcal{R})$

هل هي يسارية سنتحقق من ذلك

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ b_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x a_0 + y b_0 & 0 \\ z a_0 + r b_0 & 0 \end{bmatrix} \in I$$

الشرط الثاني محقق ومنه I مثالية يسارية في الحلقة $\mathcal{M}_2(\mathcal{R})$

انتهت المحاضرة

إعداد: لبنى الطون – محمد فهمي القاضي – أحمد ابو التوت