التكاملات الكسرية:

التابع الكسري هو تابع من الشكل $\frac{f(x)}{g(x)}$

$f(x)$, $g(x)$ كثيرا حدود.

الحالة الأولى:

درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام

$g(x) \leq f(x)$

نقسم البسط على المقام

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int \left(P(x) + \frac{h(x)}{g(x)}\right) dx$$

درجة $g(x)$ > درجة $h(x)$ (الباقي)

$P(x)$ كثير حدود (ناتج).

مثال:

$$I = \int \frac{2x^4+x^2+1}{x+1}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2x^3-2x^2+3x-3 \\ x+1 & 2x^4+x^2+1 \\ & -2x^4-2x^3 \\ \hline & 0-2x^3+x^2+1 \\ & +2x^3+2x^2 \\ \hline & 0+3x^2+1 \\ & -3x^2-3x \\ \hline & 0-3x+1 \\ & +3x+3 \\ \hline & 0+4 \end{array}$$

$$I = \int \left(2x^3-2x^2+3x-3+\frac{4}{x+1}\right) dx$$

$$= \frac{x^4}{2} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 4\ln|x+1| + C$$

الحالة الثانية:

درجة $g(x)$ > درجة $f(x)$

الطريقة:

أي كثير حدود نكتبه على شكل جداء عوامل من الدرجة الأولى والدرجة الثانية

$$g(x) = (x-a_1)(x-a_2)^{m_1}(x-a_3)^{m_2}\cdots(\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{n_1}\cdots(\alpha_2x^2+\beta_2x+\gamma_2)^{n_2}\cdots$$

1- إذا كان $g(x)$ يتحلل إلى عوامل من الدرجة الأولى

$$g(x) = (x-a_1)(x-a_2)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x-a_1} + \frac{B}{x-a_2}$$

$$I = \int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

نضرب بـ $x-1$ ونأخذ النهاية $x \to 1$

$$A = \frac{1}{2}$$

نضرب بـ $x+1$ ونأخذ النهاية $x \to -1$

$$B = -\frac{1}{2}$$

سيرياماث

Scanned by CamScanner

$$I = \int \frac{dx}{(x-2)^3}$$

بوضع $u = x-2$ ونفاضل الاثنين نجد $du = dx$

$$= \frac{-1}{2(x-2)^2} + C$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

3- اذا كان المقام حاصل ضرب عوامل من الدرجة الثانية غير قابل للتحليل

$$g(x) = (a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1x+B_1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)} + \frac{A_2x+B_2}{(a_2x^2+b_2x+c_2)}$$

توحد المقامات وتطابق

$$I = \int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx$$

نعرف $x^2 = t$

$$I = \int \frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$$

$$\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$x^3+x^2+x+2 = Ax^3+Ax+Bx^2+B + Cx^3+2Cx+Dx^2+2D$$

$1 = A+C$	①	x^3
$1 = B+D$	②	x^2
$1 = A+2C$	③	x
$2 = B+2D$	④	الثوابت

وظيفة:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$$

2- إذا كان المقام درجة أولى مكرر

$$g(x) = (x-a)^n$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A}{(x-a)^n}$$

مثال:

$$I = \int \frac{dx}{(x-2)^3}$$ بالصورة نفسها كما هي نعوض البسط بأعداد

$$= \int \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}$$

نضرب في $(x-2)^3$ ونجعل $x \to 2$

$$C = 1$$

توحد المقامات

$$\frac{-1}{8} = \frac{A}{-2} + \frac{B}{4} - \frac{1}{8}$$

$$-1 = -A+B-1 \Rightarrow A = B$$

$$-4A+2B = 0 \Rightarrow B = 0$$

Scanned by CamScanner

$$\frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$A=0$ $\quad C=0$ $\quad (1)\cdot(3)$

$B=0$ $\quad D=1$ $\quad (2)\cdot(4)$

$$I = \int \frac{x}{x^2+2}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + \arctan x + C$$

$x \to -1$ نضرب في $(x+1)^2$ ونجعل x تقترب من -1

$$\boxed{A=6}$$

$x=1$ نعوض

$$\boxed{C=9}$$

$$A + \frac{B}{2} + \frac{C}{4} = \frac{31}{4}$$

$$\boxed{B=-1}$$

$$I = 6\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{(x+1)} + 9\int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$= 6\ln|x| - \ln|x+1| - \frac{9}{(x+1)} + C$$

إذا كان $g(x)$ بداية من الدرجة الثانية

وتكرر

$$g(x) = (ax^2+bx+c)^n$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(\quad)^n}$$

مثال:

$$I = \int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx$$

درجة البسط أصغر من درجة المقام

بأخذ x عامل مشترك

$$= \int \frac{5x^2+20x+6}{x(x^2+2x+1)}\,dx$$

$$= \int \frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2}\,dx$$

أوجد تكامل

$$I = \int \frac{dx}{x^4+2x^2+1}$$

$x^2=t$ نعوض

$$= \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

درجة ثانية تكررت

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

بإيجاد ثوابت المقامات وتعويضها

Scanned by CamScanner

$= -\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-3| + \frac{1}{2}$

$\ln|x+1| + C$

$$I = \int \frac{x}{x^3 - 3x + 2}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x + 2 & x^2 + x - 2 \\ \hline x^3 - x^2 & \\ \hline x^2 - 3x & \\ x^2 - x & \\ \hline -2x + 2 & \\ -2x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad x - 1$$

$$\frac{x}{x^3 - 3x + 2} = \frac{x}{(x-1)(x^2+x-2)} = \frac{x}{(x-1)(x+2)(x-1)}$$

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

$$B = \frac{1}{3},\quad A = \frac{2}{9}$$

$$C = -\frac{2}{9}$$

$1 = Ax^2 + Ax + Bx^2 + B + Cx + D$

$0 = A$

$0 = B$

$0 = A + C$

$1 = B + D$

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = I_n$$

$$I = \int \frac{5x+3}{x^3 - 2x^2 - 3x}\,dx$$

$$= \int \frac{5x+3}{x(x^2 - 2x - 3)}\,dx$$

$$= \int \frac{5x+3}{x(x-3)(x+1)}\,dx$$

$$\frac{5x+3}{x(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1}$$

$$C = \frac{1}{2},\quad B = \frac{3}{2},\quad A = -1$$

$$I = \int \frac{-dx}{x} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{1}{2}\int$$

Scanned by CamScanner

$$I = \int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}\right) dx$$

$$\frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$B = \frac{16}{3}$, $A = 0$, $D = \frac{1}{3}$, $C = 0$

$$I = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$- \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{3}\ln|x+2| +$$

$$I = \int \frac{x-1}{x^2(x-1)}\,dx$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

$B = -1$ $\quad A = -2$

$C = 2$

Scanned by CamScanner

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)}$$

$$= \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$B = C = A = \frac{1}{2}$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\arctan x + C$$

$$I = \int \frac{dx}{x^4-1}$$

$$= \frac{dx}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$B = \frac{1}{4},\ A = -\frac{1}{4},\ D = -\frac{1}{2},\ C = 0$$

Scanned by CamScanner

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x| + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{}{} + \frac{-2}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{x-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$$

1- $I = \int \frac{dx}{x^2-x+2}$ تمرين وظيفة

2- $I = \int \frac{x+2}{x^3-3x^2+2x}\,dx$

3- $I = \int \frac{2x^3+1}{x^2-3x+2}\,dx$

4- $I = \int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

5- $I = \int \frac{x+1}{x^3+2x^2}\,dx$

6- $I = \int \frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)}\,dx$

7- $I = \int \frac{dx}{x^3+x^2}$

8- $I = \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$

$$I = \int \frac{dx}{x^3+1}$$

$$= \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$x-1 \;\Big)\; x^3+1 \;\Big(\; x^2-x+1$$
$$x^3+x^2$$
$$-x^2+1$$
$$-x^2-x$$
$$x+1$$

$$\frac{A}{x+1} = \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{1}{(\quad)(\quad)}$$

$$B = -\frac{1}{3},\ C = -\frac{2}{3},\ A = \frac{1}{3}$$

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx$$

$$I = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{6}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

راجع الكتاب بركات

تمرينات

واعداد: رانيا كيلاني

Scanned by CamScanner