30-3-2017

نظري

◄ دكتور المادة: جبران جبران

◄ المحاضرة الثالثة   عنوان المحاضرة: الفضاءات الطوبولوجية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ المجموعات المغلقة في فضاء طوبولوجي

٢ـ مبرهنة توضح أحد الصفات المميزة لفضاء متري

٣ـ الفضاء الطوبولوجي المتور (القابل للتمتير)

٤ ـ تكافؤ دالتي مسافة

درسنا في المحاضرة السابقة تعريف الطوبولوجيا على مجموعة غير خالية و الطوبولوجيا المولدة بدالة مسافة و لندرس معاً بعض الأمثلة :

مثال : لنأخذ المجموعة غير الخالية $X = \{1,2,3\}$ و لنأخذ :

$$\tau = P(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, X\}$$

مجموعة جميع أجزاء X ، إن τ تشكل طوبولوجيا على X لتحقق شروط التعريف ، حيث نجد أن :

١- $\emptyset, X \in \tau$

٢- $\forall A, B \in \tau; A \cap B \in \tau$

٣- اجتماع أي جماعة من المجموعات الجزئية من τ هو مجموعة جزئية من τ

و يمكن بسهولة التحقق من أن $\tau = P(X)$ تحقق الشروط أعلاه ، و بالتالي نجد أن (X, τ) فضاء طوبولوجي

ندعو كل طوبولوجيا مشكلة من مجموعة أجزاء X **بالطوبولوجيا المتقطعة** .

مثال : لنأخذ $X = \mathbb{N}$ و لنأخذ $\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ أيضاً هي تشكل طوبولوجيا على X

ندعو كل طوبولوجيا $\tau = \{\emptyset, X\}$ معرفة على X **بالطوبولوجيا التافهة .** (مكونة من المجموعة نفسها و الخالية فقط)

<u>تذكر :</u> في الفضاء الطوبولوجي (X, τ) المجموعات المفتوحة هي و فقط هي عناصر الطوبولوجيا τ

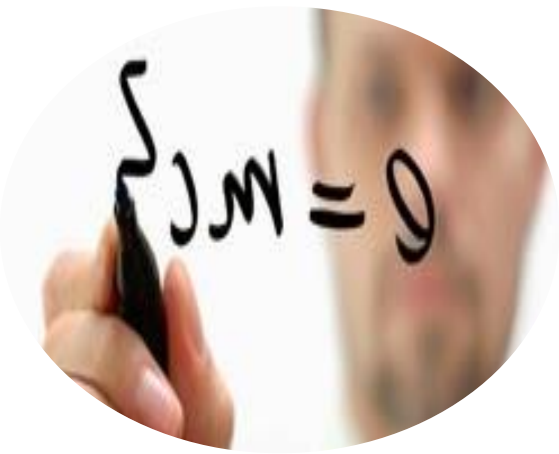
و لكن تجدر الإشارة أنه إذا لم تكن المجموعة مفتوحة (سواءً في فضاء طوبولوجي أو متري) فليس بالضرورة أن تكون مغلقة فهذه مجرد تعاريف و نفي كونها مفتوحة لا يجعل منها مغلقة إلا إذا حققت تعريف المجموعة المغلقة و سنأخذ التعريف فيما يلي

<u>تعريف (المجموعة المغلقة)</u> : ليكن (X, τ) فضاء طوبولوجي ، نقول عن المجموعة $\mathcal{A}$ إنها مغلقة في X إذا كان $\mathcal{A}^{c} = X \setminus \mathcal{A}$ (متتمة المجموعة $\mathcal{A}$) هي مجموعة مفتوحة .

و لكن في الفضاء الطوبولوجي (X, τ) تكون المجموعة مفتوحة إذا انتمت إلى τ ، و بالتالي يمكن صياغة تعريف المجموعة **المغلقة** بالشكل التالي :

ليكن (X, τ) فضاء طوبولوجي ، نقول عن المجموعة $\mathcal{A}$ إنها مغلقة في X إذا كان $\mathcal{A}^{c} \in \tau$.

و لننظر في المثالين الواردين في بداية المحاضرة و لنحاول البحث عن المجموعات المغلقة في كل مثال



في المثال الأول : سنأخذ كل مجموعة جزئية من X و نرى فيما إذا كانت متممتها مفتوحة (تنتمي إلى τ) عندئذٍ تكون المجموعة المأخوذة من X مغلقة

$\emptyset^c = X \setminus \emptyset = X \in \tau \Rightarrow$ مغلقة $\emptyset$

$\{1\}^c = X \setminus \{1\} = \{2,3\} \in \tau \Rightarrow$ مغلقة $\{1\}$

$\{2\}^c = X \setminus \{2\} = \{1,3\} \in \tau \Rightarrow$ مغلقة $\{2\}$

$\{3\}^c = X \setminus \{3\} = \{1,2\} \in \tau \Rightarrow$ مغلقة $\{3\}$

$\{1,2\}^c = X \setminus \{1,2\} = \{3\} \in \tau \Rightarrow$ مغلقة $\{1,2\}$

$\{1,3\}^c = X \setminus \{1,3\} = \{2\} \in \tau \Rightarrow$ مغلقة $\{1,3\}$

$\{2,3\}^c = X \setminus \{2,3\} = \{1\} \in \tau \Rightarrow$ مغلقة $\{2,3\}$

$\{1,2,3\}^c = X \setminus \{1,2,3\} = \emptyset \in \tau \Rightarrow$ مغلقة $\{1,2,3\} = X$

نلاحظ أن جميع عناصر P(x) هي مجموعات مغلقة و كونها هي نفسها عناصر الطوبولوجيا فهي مفتوحة إذاً مجموعة أجزاء X هنا هي مفتوحة و مغلقة في آنٍ معاً

في المثال الثاني : إن المجموعتان $\mathbb{N}$, $\emptyset$ هما المجموعتان المغلقتان الوحيدتان في هذا الفضاء .. ذلك لأن $\emptyset^c = \mathbb{N} \in \tau$ و أيضاً $\mathbb{N}^c = \emptyset \in \tau$.

خواص المجموعات المغلقة في الفضاء الطوبولوجي (X,τ):

١- إن $\emptyset, X$ مجموعتان مغلقتان

٢- لتكن A, B مجموعتين مغلقتين عندئذٍ $A \cup B$ مجموعة مغلقة

٣- تقاطع أي جماعة من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة

((يمكن إثبات الخواص السابقة باستخدام جبر المجموعات و خواص المجموعات المفتوحة))

سؤال : هل كل فضاء متري هو فضاء طوبولوجي ، و هل كل فضاء طوبولوجي هو فضاء متري ؟!

- في الحقيقية إن كل فضاء متري (X,d) يكون فضاء طوبولوجي ذلك لأن الفضاء المتري معرف عليه متركاً d (دالة مسافة) و هذه الدالة تحدد مجموعات مفتوحة نسميها τ_d و يكون الفضاء (X,τ_d) فضاء طوبولوجي مولد من دالة المسافة d
- أما العكس فليس صحيحاً بالضرورة ، ذلك لأنه إذا كان (X,τ) فضاءً طوبولوجياً فليس بالضرورة أن يوجد تابع مسافة d يحدد على X مجموعات مفتوحة هي و فقط هي نفسها المجموعات المفتوحة τ ((بمعنى أخر ليس بالضرورة وجود تابع مسافة d يحقق أن $\tau_d = \tau$))
- و في حال وجد مثل هذه الدالة ، فإننا نقول أن الفضاء الطوبولوجي **متور (قابل للتمتير).**

و سنأتي للتفصيل في هذا الموضوع بعد قليل .

أما الآن ، سنتعرف على ميزة مهمة يتمتع بها الفضاء المتري .

مبرهنة : كل مجموعة منتهية في فضاء متري هي مجموعة مغلقة .

البرهان: فكرة البرهان : سنثبت أولاً أن كل مجموعة وحيدة العنصر في فضاء متري هي مجموعة مغلقة ، و من ثم تكون أي مجموعة منتهية هي اجتماع جميع المجموعات وحيدة العنصر من عناصر هذه المجموعة و لأن الاجتماع المنتهي لمغلقات هو مغلقة يتم المطلوب .... لنبدأ:

ليكن (X,d) فضاءً مترياً و $a \in X$ و لنثبت أن $\{a\}$ مجموعة مغلقة ، أي لنثبت أن متممتها $A = X \setminus \{a\}$ هي مجموعة مفتوحة ..

و من أجل ذلك يجب إثبات أنه :

$$\forall x \in A; \exists r > 0 : N_d(x,r) \subseteq A$$

لدينا $x \in A = X \setminus \{a\}$ و بالتالي $x \neq a$ و هذا يبين أن $r = d(x,a) \gneqq 0$

و أنّ: $a \notin N_d(x,r)$ لأنه لو كان $a \in N_d(x,r)$ لكان $\underbrace{d(x,a)}_{=r} < r$ و هذا تناقض و بالتالي نجد أن :

$$\mathrm{N_d}(x,r) \subseteq X \setminus \{a\} = A$$

و هذا يبين أن المجموعة $\mathrm{A} = X \setminus \{a\}$ مفتوحة ، و بالتال متممتها مجموعة مغلقة أي أن المجموعة $\{a\}$ مجموعة مغلقة

الآن ، إن أي مجموعة منتهية مثل $F = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ يمكن كتابتها على شكل اجتماع لعناصرها (كمجموعات وحيدة العنصر) أي:

$$\mathrm{F} = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\}$$

و حسب نص سابق ، إن الاجتماع المنتهي لمجموعات مغلقة هو مجموعة مغلقة ، و يتم بذلك المطلوب .

تعريف الفضاء الطوبولوجي المتور (القابل للتمتير) :

نقول عن الفضاء الطوبولوجي (X,τ) إنه متور أو قابلاً للتمتير إذا وفقط إذا وجد تابع مسافة d معرف على X بحيث يكون $\tau = \tau_d$

مثال : إن الفضاء الطوبولوجي $(\mathbb{N},\tau)$ حيث $\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ هو فضاء غير قابل للتمتير و ذلك لأنه حسب المبرهنة السابقة إذا كان الفضاء مترياً فإن كل مجموعة منتهية تكون مغلقة ، و هذا غير محقق هنا ، لنأخذ مثلاً المجموعة المنتهية $\{1,2\}$ فنجد أنها ليست مغلقة لأن متممتها ليست مفتوحة (لا تنتمي إلى τ)

وجدنا مجموعة منتهية ليست مغلقة ، فالفضاء غير متري .

مثال : إن كل فضاء طوبولوجي متقطع $(X,P(X))$ متور لأن يوجد تابع مسافة d و هو تابع المسافة المتقطعة بحيث يحقق أن $\tau_d = \tau = P(X)$

تذكر : تابع المسافة المتقطعة معرف بالشكل :

$$d: X \times X \to X$$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & : x = y \\ 1 & : x \neq y \end{cases}$$

و تجدر الإشارة إلى أن الكرات المفتوحة هنا هي :

$$N_d(a,r) = \begin{cases} \{a\} & : r \leq 1 \\ X & : r > 1 \end{cases}$$

و بالتالي اثبات أن هذا الفضاء متور يمكن ان يتم بطريقة أخرى حيث نعلم أن المجموعة المفتوحة هي اجتماع كرات مفتوحة :

$$\forall A \subseteq X; A = \bigcup_{x\in A} \{x\} = \bigcup_{x\in A} N_d\left(x,\frac{1}{3}\right)$$

و بالتالي A مجموعة مفتوحة

تكافؤ المسافات في الفضاءات المترية :

تعريف : نقول عن تابعي مسافة d_1, d_2 المعرفان على X إنهما متكافئين إذا كان $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$

و نقول عندئذٍ أن الفضاءات المترية $(X,d_1),(X,d_2)$ متكافئيين.

مبرهنة : ليكن $(X,d_1),(X,d_2)$ فضاءات مترية:

١- إذا كانت كل كرة مفتوحة في (X,d_1) تحوي كرة مفتوحة لها نفس المركز في (X,d_2) فإن $\tau_{d_1} \subseteq \tau_{d_2}$

٢- إذا كانت كل كرة مفتوحة في أحد هذه الفضاءات تحوي كرة مفتوحة و لها نفس المركز في الفضاء الآخر عندئذٍ يكون $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$

و لنثبت الخاصية (١) :

أي لنثبت أن $\forall A \in \tau_{d_1} ; A \in \tau_{d_2}$ و بالتالي لنحاول إثبات أن A مفتوحة في (X,d_2) و لذلك سنثبت أن :

$$\forall x \in A; \exists r > 0 : N_{d_2}(x,r) \subseteq A$$

لما كان $x \in A$ و A مفتوحة في الفضاء (X,d_1) بالتالي يوجد في كرة مفتوحة مركزها x محتواة في A في الفضاء (X,d_1) أي يوجد $r' > 0$ بحيث :

$$\mathrm{N}_{\mathrm{d}_1}(x,r') \subseteq A$$

و حسب الفرض يوجد $r > 0$ بحيث $N_{d_2}(x,r) \subseteq N_{d_1}(x,r') \subseteq A$ أي $A \in \tau_{d_2}$

انتهت المحاضرة

إعداد: عبد الرحمن البحش – شهناز طاطيش – نذير تيناوي