نظري

◄ دكتور المادة: جبران جبران

◄ المحاضرة السادسة

عنوان المحاضرة: النقاط الحدية لمجموعة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ مبرهنة تربط بين مفهوم المجموعة المفتوحة و مفهوم داخل مجموعة

٢ـ النقاط الحدية (التراكم ـ التجمع)

٣ـ مبرهنات و خواص النقاط الحدية

٤ـ أمثلة

سنستخدم في المبرهنات القادمة عمليات من جبر المجموعات و لذلك سنذكّر بأهم عمليات جبر المجموعات في هذا الاطار المرفق علماً أن الرمز A' هنا يقصد به المتمم و ليس نقاط التراكم A^c

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$
$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$$
$$U' = \emptyset \qquad \emptyset' = U$$
$$A \cup U = U \qquad A \cap U = A$$
$$A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$(A')' = A$$
$$A \cup A' = U \qquad A \cap A' = \emptyset$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

و لنبدأ الآن بمحاضرتنا :

مبرهنة (نتيجة) : ليكن (X, τ) فضاء طوبولوجي و ليكن $A \subseteq X$ عندئذٍ الشرط اللازم و الكافي لكي تكون A مجموعة مفتوحة هو أن $A = A^{\circ}$

البرهان : إذا كانت A مجموعة مفتوحة $\Leftrightarrow A \in \tau$ و عندئذٍ :

$$\forall x \in A \,;\, \exists A \in \tau : x \in A \subseteq A$$

إذن : $A = A^{\circ}$

و بالعكس إذا كانت $A = A^{\circ} \Leftrightarrow$ جميع نقاط A نقاط داخلية لـ A ، لنثبت أن المجموعة A مفتوحة :
بما أن جميع النقاط داخلية فإنه يكون:

$$\forall x \in A = A^{\circ} \Leftrightarrow \exists B_x \in \tau : x \in B_x \subseteq A$$
$$\Leftrightarrow \{x\} \subseteq B_x \subseteq A$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\bigcup_{x \in A} \{x\}}_{=A} \subseteq \bigcup_{x \in A} B_x \subseteq \underbrace{\bigcup_{x \in A} A}_{=A}$$
$$\Leftrightarrow A \subseteq \bigcup_{x \in A} B_x \subseteq A \Leftrightarrow A = \bigcup_{x \in A} B_x \in \tau$$

و بالتالي A اجتماع لمجموعات مفتوحة فهي مجموعة مفتوحة .

النقطة الحدية (نقطة التجمع) :

ليكن (X, τ) فضاء طوبولوجي و لتكن $A \subseteq X$ نقول عن $x \in X$ إنها نقطة حدية (نقطة تجمع) لـ A إذا كانت كل مجموعة مفتوحة في X و تحوي x تحوي نقطة واحدة على الأقل من المجموعة $A \setminus \{x\}$ أي إذا و فقط إذا تحقق الشرط : $\forall B \in \tau : \ x \in B \Rightarrow B \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ و نرمز بـ A' لمجموعة نقاط التجمع لـ A

مثال : $X = \{a, b, c, d, e\}$ و لنفرض $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ أوجد $A' = \{c, d, e\}'$

الحل : $A = \{c, d, e\}$ ،

١. $x = a$ إن المجموعات المفتوحة التي تحوي a هي $X, \{a\}, \{a, b, c\}$:

$$X \cap (A \setminus \{a\}) = X \cap (\{c, d, e\} \setminus \{a\}) = X \cap \{c, d, e\} = \{c, d, e\} \neq \emptyset$$
$$\{a\} \cap (A \setminus \{a\}) = \{a\} \cap \{c, d, e\} = \emptyset$$

إذاً a ليست حدية لأنه وجد مجموعة مفتوحة لا تحقق الشرط .

٢. $x = b$ ، إن المجموعات المفتوحة التي تحوي b هي $X, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

$$X \cap (A \setminus \{b\}) = X \cap \{c, d, e\} = \{c, d, e\} \neq \emptyset$$
$$\{b, c\} \cap (A \setminus \{b\}) = \{b, c\} \cap \{c, d, e\} = \{c\} \neq \emptyset$$
$$\{a, b, c\} \cap (A \setminus \{b\}) = \{a, b, c\} \cap \{c, d, e\} = \{c\} \neq \emptyset$$

تحقق الشرط من أجل أي مجموعة مفتوحة تحوي b ، و بالتالي $b \in A'$

٣. $x = c$ ، إن المجموعات المفتوحة التي تحوي النقطة c هي $X, \{b,c\}, \{a,b,c\}$

$$X \cap (A \setminus \{c\}) = \{d,e\} \neq \emptyset$$
$$\{b,c\} \cap (A \setminus \{c\}) = \{b,c\} \cap \{d,e\} = \emptyset$$

إذاً c ليست حدية لعدم تحقق الشرط من أجل أحد المجموعات المفتوحة التي تحوي c

٤. $x = d$ ، المجموعات المفتوحة التي تحوي d هي X فقط و نجد أن:

$$X \cap (A \setminus \{d\}) = \{c,e\} \neq \emptyset$$

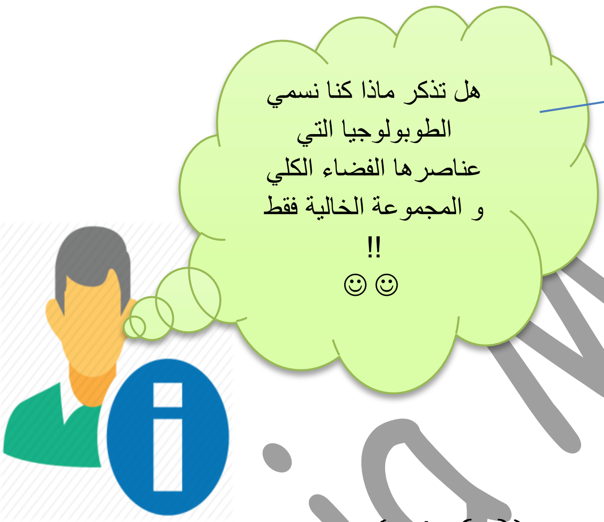
إذاً d حدية أي $d \in A'$

٥. $x = e$ ، المجموعات المفتوحة التي تحوي e هي X:

$$X \cap (A \setminus \{e\}) = \{c,d\} \neq \emptyset$$

إذاً $e \in A'$ و بالتالي و مما سبق نجد أن :

$$A' = \{b,d,e\}$$



مثال ٢ : ليكن لدينا الفضاء الطوبولوجي $(\mathbb{N}, \{\emptyset, \mathbb{N}\})$

أوجد $\{7\}'$ و $\{1,2,5\}'$

الحل :

١- من أجل $A' = \{7\}'$ سنميز حالتين :

- $x = 7$، المجموعات المفتوحة التي تحوي النقطة $x = 7$ هي $\mathbb{N}$ فقط و نلاحظ :

$$\mathbb{N} \cap (A \setminus \{7\}) = \mathbb{N} \cap (\{7\} \setminus \{7\}) = \emptyset \Longrightarrow 7 \notin A' = \{7\}'$$

- $x \neq 7$ ، فالمجموعات المفتوحة التي تحوي x هي $\mathbb{N}$ فقط و أنّ:

$$\mathbb{N} \cap (A \setminus \{x\}) = \mathbb{N} \cap (\{7\} \setminus \{x\}) = \mathbb{N} \cap \{7\} = \{7\} \neq \emptyset$$

و بالتالي $\{7\}' = \mathbb{N} \setminus \{7\}$

٢- من أجل $B' = \{1,2,5\}'$ ، نميز حالتين

◄من أجل كل $x \in B$ ، فإن المجموعات المفتوحة التي تحوي x هي $\mathbb{N}$ و بالتالي سيكون :

$$\mathbb{N} \cap (B \setminus \{x\}) = \begin{cases} \{1,2\} & : x = 5 \\ \{1,5\} & : x = 2 \\ \{2,5\} & : x = 1 \end{cases}$$

و في كل الحالات هي غير خالية و بالتالي

و بالتالي xحدية ; $\forall x \in B$

◀من أجل $x \in \mathbb{N} \setminus B$ فإن $\mathbb{N} \cap (B \setminus \{x\}) = \mathbb{N} \cap B = B = \{1,2,5\} \neq \emptyset$

و بالتالي $\forall x \in \mathbb{N} \setminus B$ فإن x حدية ،

من كل ما سبق نجد أن جميع نقاط $\mathbb{N}$ هي نقاط تجمع للمجموعة B أي أن $B' = \mathbb{N}$

مبرهنة :

ليكن(X,τ) فضاء طوبولوجي و $A, B \subseteq X$ عندئذٍ :

١- $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$

٢-$(A \cup B)' = A' \cup B'$

البرهان :

١- بفرض أن $A \subseteq B$ و ليكن $x \in A'$ ، فهذا يكافئ أن :

$$\forall C \in \tau : x \in C ; C \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

و لكن $A \setminus \{x\} \subseteq B \setminus \{x\}$ و بالتالي :

$$\forall C \in \tau : x \in C ; C \cap (B \setminus \{x\}) \neq \emptyset \;\Leftrightarrow x \in B'$$

$$\Rightarrow A' \subseteq B'$$

٢- لدينا :

$$\forall\, x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow \forall C \in \tau : x \in C ; C \cap \big((A \cup B) \setminus \{x\}\big) \neq \emptyset$$

لكن نعلم أن $D \setminus E = D \cap E^c$و بالتالي يمكن أن نكتب بناءً على ما سبق أن :

$$C \cap \big((A \cup B) \cap \{x\}^c\big) \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow C \cap [(A \cap \{x\}^c) \cup (B \cap \{x\}^c)] \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \big(C \cap (A \cap \{x\}^c)\big) \cup \big(C \cap (B \cap \{x\}^c)\big) \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow (C \cap (A \setminus \{x\}) \cup (C \cap (B \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

و حسب تعريف النقطة الحدية فإنه إما $x \in A'$ أو أن $x \in B'$ و هذا يكافئ قولنا أن :

$$x \in A' \cup B'$$

مما سبق نجد أن $(A \cup B)' = A' \cup B'$

((لأن العمليات السابقة متكافئة فالإثبات قد تم بالاتجاهين معاً))

ملاحظة : ليكن (X,τ) فضاء طوبولوجي ، عندئذٍ : $\forall x \in X : x \notin \{x\}'$

الإثبات : $\forall C \in \tau : x \in C ; C \cap (\{x\} \setminus \{x\}) = C \cap \emptyset = \emptyset$ و بالتالي $x \notin \{x\}'$

مبرهنة :

ليكن (X,τ) فضاء طوبولوجي ، عندئذٍ :

$$A \text{ مغلقة في } (X,\tau) \Leftrightarrow A' \subseteq A$$

البرهان :

بفرض أن A مغلقة ، لنثبت أن $A' \subseteq A$ ، و يكفي لبرهان ذلك أن نثبت أن

$$x \notin A \Longrightarrow x \notin A'$$

بفرض أن $x \notin A$ عندئذٍ $x \in A^c$.

بما أن $A^c \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ و بالتالي $x \in A^c$ و هذا يعني أن $A' \subseteq A$

و بالعكس : بفرض أن $A' \subseteq A$ و لنثبت أن A مغلقة (يكفي إثبات أن جميع نقاط المجموعة A هي نقاط داخلية لـ A^c)

ليكن $x \in A^c$ و بالتالي $x \notin A$ و منه $x \notin A'$ و بالتالي :

$$\exists B \in \tau : x \in B \ \ , B \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$$

لكن $A \setminus \{x\} = A$ إذاً تكتب العبارة السابقة بالشكل :

$$\exists B \in \tau : x \in B \ \ , B \cap A = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow Bx \in B \subseteq A^c$$

و هذا يعني أن x نقطة داخلية لـ A^c أي $x \in A^c$ إذاً A^c مجموعة مفتوحة و بالتالي المجموعة A مغلقة

انتهت المحاضرة

إعداد: عبد الرحمن البحش – شهناز طاطيش – نذير تيناوي