البنى الجبرية ٢

8-5-2017

نظري

◀ دكتورة المادة: ريم الحاج خليفة

◀ المحاضرة: الثالثة عشر ◀ عنوان المحاضرة: حلقة الحدوديات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـتعريف حلقة الحدوديات .

٢ـمبرهنتان تتعلقان بالحدوديات خواصها.

تعريف حلقة الحدوديات : لتكن R حلقة واحدية ولنأخذ المجموعة S المعرفة بالشكل التالي

$$S = \{f = (f_0, f_1, , , , , , , , f_n\ ) \ ; f_i \in R \ : \forall i \in I \ \ : 0 \leq i \leq n\}$$

اذاً المجموعة تتألف من عناصر من الحلقة و جميع مركباتها عناصر من الحلقة والتي تحقق $f_i = 0$.

مبرهنة : ليكن R حلقة واحدية ولنعرف على المجموعة S عملية الجمع $(+)$ بالشكل التالي

$$S = \{f = (f_0, f_1, , , , , , , , f_n\ ) \ ; f_i \in R \ : f_i = 0 \ \ : \ \ \forall i \in I \ \ \}$$

$$\forall f = (f_0, f_1, , , , , , , , f_n, , ,) \ , \quad g = (g_0, g_1, , , , , , , , g_n\ , , ,) \in S$$

$$f + g = (f_0 + g_0, f_1 + g_1, , , , , , , , f_n + g_n, , ,) \in S$$

برهن أن الثنائية $(S, +)$ تشكل زمرة تبديلية .

البرهان : ١) واضح من خلال التعريف أن عملية $(+)$ على المجموعة S هي عملية داخلية .

٢) التجميعية محققة لأن :

$$\forall f = (f_0, f_1, , , , f_n\ , ,) \ , \quad g = (g_0, g_1, , , g_n, , ,), \quad h = (h_0\ \ , h_1, , , , , h_n, , ,) \in S$$

$$(f + g) + h = (f_0 + g_0, f_1 + g_1, , , , , , , , f_n + g_n, , ,) + (h_0\ \ , h_1, , , , , , , , , h_n, , ,)$$

$$= ((f_0 + g_0) + h_0, (f_1 + g_1) + h_1, , , , , , , , (f_n + g_n) + h_n, , ,)$$

$$= (f_0 + (g_0 + h_0), f + (g_1 + h_1), , , , , , , , , , f_n + (g_n + h_n), , ,)$$
$$= (f_0, f_1, , , , , , , , f_n, , ,) + (g_0 + h_0, g_1 + h_1, , , , , , , , g_n + h_n, , ,)$$
$$= f + (g + h)$$

٣) التبديلية محققة لأن

$$f + g = (f_0, f_1, , , , , , , , f_n, , ,) + (g_0, g_1, , , , , , , , g_n, , ,)$$
$$= (f_0 + g_0, f_1 + g_1, , , , , , f_n + g_n, , ,) = (g_0 + f_0, g_1 + f_1, , , , , g_n + f_n, , ,)$$
$$= (g_0, g_1, , , , , , , , g_n, , ,) + (f_0, f_1, , , , , , , , f_n, , , ,) = g + f$$

٤) المحايد موجود لأن :نلاحظ أنه يوجد في المجموعة S عنصر محايد بالنسبة للجمع هو $(0,0,0,,0,0,0,0,,,,,)$

$$(f_0, f_1, , , , , , , , f_n, , ,) + (0,0,0,,0,0,0,0,,,,,) = (f_0, f_1, , , , , , , , f_n, , ,)$$

٥) لكل عنصر نظير : $\forall f = (f_0, f_1, , , , , , , , f_n, , ,)$ وبالتالي

$$-f = (-f_0, -f_1, , , , , , , , -f_n, , ,)$$
$$(f_0, f_1, , , , , , , , f_n, , ,) + (-f_0, -f_1, , , , , , , , -f_n, , ,) = (0,0,0,,0,0,0,0,,,,,)$$

وبالتالي $(S, +)$ تشكل زمرة تبديلية .

مبرهنة : ليكن R حلقة واحدية ولنعرف على المجموعة S عملية الضرب (.) بالشكل التالي

$$S = \{f = (f_0, f_1, , , , , , , , f_n) \ ; f_i \in R \ : \ \forall i \in I \ \}$$
$$\forall f = (f_0, f_1, , , , , , , , f_n, , , ,), \quad g = (g_0, g_1, , , , , , , , g_n, , , ,) \in S$$

$f . g = h$ بحيث $h = (h_0 \ , h_1, , , , h_n, , , ,)$ وأن $h_k = \sum_{i+j=k} f_i . g_i$ ويمكن أن نكتب هذا الشكل أيضاً بالشكل التالي $h_k = f_0 g_k + f_1 g_{k-1} + \cdots \dots \dots \dots . . + f_{k-1} g_1 + f_k g_0$

عندئذ : ١) العملية (.) المعرفة على المجموعة S هي عملية داخلية وتجميعية .

٢) يوجد في المجموعة S عنصر محايد بالنسبة للضرب هو $1 = (1,0,0,0,0,0,0,0,,,,)$

٣) الضرب توزيعي على الجمع من اليمين واليسار

٤) الثلاثية $(S, +, .)$ تشكل حلقة واحدية .

٥) الحلقة R هي حلقة جزئية من الحلقة $(S, +, .)$.

البرهان: (ملاحظة عملية الجمع المعرفة في المبرهنة هذه هي نفس العملية التي في المبرهنة السابقة .)

١) واضح من خلال التعريف أن عملية (.) على المجموعة S هي عملية داخلية وهي تجميعية لأنه

$$\forall f = (f_0, f_1,,, f_n ,,,,) ,\quad g = (g_0, g_1,,,, g_n ,,,,),\quad t = (t_0 \ , t_1,,, t_n,,,,) \in S$$

بحيث $f.g = h$ وليكن $h = (h_0 \ , h_1,,,, h_n,,,,)$ ويمكن أن نكتب $h_k = \sum_{i+j=n} f_i . g_i$ هذا الشكل أيضاً بالشكل التالي $h_k = f_0 g_k + f_1 g_{k-1} + \cdots \dots \dots \dots . . + f_{k-1} g_1 + f_k g_0$

$$(f.g).t = h.t = d : \quad d = (d_0 \ , d_1,,,,,,,,, d_n,,,,,) \in S$$

$$\underbrace{d_s = \sum_{n+m=s} h_n t_m}_{\text{حسب نص المبرهنة}} = (f.g).t = \underbrace{\sum_{n+m=s} \Big(\sum_{i+j=n} f_i . g_i \Big) t_m}_{\text{عوضنا}} = \underbrace{\sum_{i+j+m+t=s+t} (f_i . g_i) t_m}_{\text{اضفنا } t \text{ للطرفين وجمعناهم}}$$

$$= \sum_{i+t=s} f_i \left(\sum_{j+m=t} g_i . t_m \right) = f(g.t)$$

٢) ان $1 = (1,0,0,0,0,0,0,,,,) \in S$ وأن $\forall f = (f_0, f_1,,,, f_n,,,,) \ : \ 1.f = f.1 = f$

وبالتالي يوجد في S عنصر محايد بالنسبة للضرب وهو $1 = (1,0,0,0,0,0,0,,,,)$

٣) $\forall f = (f_0, f_1,,,,, f_{n,} ,,,,,) ,\quad g = (g_0, g_1,,,,,,,, g_n,,,,,),\quad t = (t_0 \ , t_1,,, t_n,,,,,) \in S$

$$f.(g+t) = f(g_0 + t_0, g_1 + t_1,,,,,,,, g_n + t_n,,,,) = (d_0 \ , d_1,,,,,,,,, d_n,,,,)$$

$$d_k = \sum_{i+j=k} f_i (g_j + t_j)$$

$$f.(g+t) = \sum_{i+j=k} f_i g_j + f_i t_j = \sum_{i+j=k} f_i g_j + \sum_{i+j=k} f_i t_j = f.g + f.t$$

ومنه الضرب توزيعي على الجمع من اليسار .

$$(f+g).t = (f_0 + g_0, f_1 + g_1,,,,,,,, f_n + g_n,,,,).t = (d_0 \ , d_1,,,,,,,,, d_n,,,,)$$

$$d_k = \sum_{i+j=k} (f_i + g_i)\, t_j$$

$$(f+g).t = \sum_{i+j=k} (f_i t_j + g_i t_j) = \sum_{i+j=k} f_i t_j + \sum_{i+j=k} g_i t_j = f.t + g.t$$

ومنه الضرب توزيعي على الجمع من اليمين

٤) بالاعتماد على ما سبق الثلاثية $(S,+,.)$ تشكل حلقة واحدية .

٥) لنأخذ المجموعة S_0 من الحلقة S المعرفة بالشكل التالي $S_0 = \{ (a,0,0,0,0,,,,,,); a \in R \}$
المجموعة S_0 غير خالية لأن $1 = (1,0,0,0,0,0,0,,,,) \in S_0$ حيث S_0 جزئية من S
لنأخذ عنصرين $a,b \in R$: $\forall x = (a,0,0,0,0,,,,,,),\ y = (b,0,0,0,0,,,,,,) \in S_0$

$$x - y = (a,0,0,0,0,,,,,,) - (b,0,0,0,0,,,,,,) = (a-b,0,0,0,,,,,,,) \in S_0$$
$$x.y = (a,0,0,0,0,,,,,,).(b,0,0,0,0,,,,,,) = (a.b,0,0,0,,,,,,,) \in S_0$$

وبالتالي المجموعة S_0 هي حلقة جزئية من S

كمان أن التطبيق $\Psi: R \longrightarrow S_0$ المعرف بالشكل

$$\forall a \in R \ :\quad \Psi(a) = (a,0,0,0,0,,,,,,) \in S_0$$

سنبرهن على أن Ψ متباين و غامر وتشاكل حلقي

- إن Ψ تشاكل حلقي لأنه

$$\Psi(a+b) = (a+b,0,0,0,0,,,) = (a,0,0,0,0,,,) + (b,0,0,0,0,,,) = \Psi(a) + \Psi(\mathrm{b})$$
$$\Psi(a.b) = (a.b,0,0,0,0,,,) = (a,0,0,0,0,,,).(b,0,0,0,0,,,) = \Psi(a).\Psi(\mathrm{b})$$

وبالتالي فهو تشاكل حلقي

- كما انه متباين لأنه اذا كان $\Psi(a) = \Psi(\mathrm{b})$ أي أن $(a,0,0,0,0,,,) = (b,0,0,0,0,,,)$
فهذا يؤدي الى أن $a = \mathrm{b}$ وبالتالي فهو متباين

- وهو غامر لأنه اذا كان $(c,0,0,0,0,,,,,,) \in S_0$ وبالتالي فإن $c \in R$ وبأخذ الصورة المباشرة له يكون

$$\Psi(c) = (c,0,0,0,0,,,,,,)$$

اي أن التطبيق يشكل ايزومورفيزم وبما أن المجموعة S_0 هي حلقة جزئية من S
فتكون الحلقة R هي حلقة جزئية من الحلقة $(S,+,.)$.

(الفكرة انه يوجد تماثل بين S_0 و $\mathbf{R}$ وبالتالي ما ينطبق على المستقر ينطبق على المنطلق وبذلك تكون R هي حلقة جزئية من الحلقة $(S,+,.)$ لأن المجموعة S_0 هي حلقة جزئية من S) .

انتهت المحاضرة

إعداد: لبنى الطون – احمد ابو التوت