

### المبادىء

إن مجموع المبادىء في الفئات هو تعميم لمجموع المبادىء الديكارتي

تعريف

ليكن  $L$  فئة، و  $(A_i)_{i \in I}$  أسرة من أشياء الفئة  $L$ ، وليكن

$A \in \text{ob}(L)$  أسرة من المورفزمات من الفئة  $L$  حيث  $A \in \text{ob}(L)$

نقول أن النتيجة  $(A, (u_i)_{i \in I})$  أنها شكل حواء للأسرة  $(A_i)_{i \in I}$  إذا كان

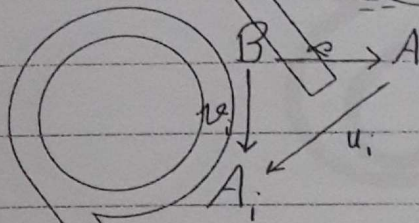
لأجل أي أسرة أخرى  $(v_i: B \rightarrow A_i)_{i \in I}$  من مورفزمات الفئة  $L$  يوجد

مورفزم وحيد  $v: B \rightarrow A$  يحقق:

$$u_i \circ v = v_i, \quad \forall i \in I$$

$$(u_i)_{i \in I} = (v_i)_{i \in I} \text{ أي أن}$$

يبنى ذلك حسب المعنى التالي:



مبرهنة: ليكن  $L$  فئة،  $(A_i)_{i \in I}$  أسرة من أشياء الفئة  $L$ ،

ونفرض أن  $A \in \text{ob}(L)$ ، وأن  $(u_i: A \rightarrow A_i)_{i \in I}$  أسرة من مورفزمات

الفئة  $L$ ، لشروط الألية متكافئة:

1- النتيجة  $(A, (u_i)_{i \in I})$  شكل حواء للأسرة  $(A_i)_{i \in I}$

2- لأجل كل  $X \in \text{ob}(L)$  فإن التطبيق:

$$\Gamma: \mathcal{L}(X, A) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{L}(X, A_i)$$

$$\Gamma(f) = (u_i \circ f)_{i \in I} \text{ المحرف بالأسفل}$$

$$\forall f \in \mathcal{L}(X, A) \text{ متباين وعامر}$$

ملاحظة: إن  $\mathcal{L}(X, A)$  هي مجموعة والناتج  $\pi \mathcal{L}(X, A)$  هي حداث  $\pi \mathcal{L}(X, A)$  هي حداث

البرهان: من (1)  $\leftarrow$  (2)

لفرض أن الناتج  $(A, (u_i)_{i \in I})$  حداث لأسرة الأشياء  $(A_i)_{i \in I}$  إن  $\Gamma$  تطبيقه لأن:

لأجل كل  $f, g \in \mathcal{L}(X, A)$  حيث

$$f = g \Rightarrow$$

$$u_i \cdot f = u_i \cdot g \quad \forall i \in I$$

$$(u_i \cdot f)_{i \in I} = (u_i \cdot g)_{i \in I}$$

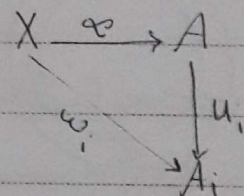
$$\Gamma(f) = \Gamma(g)$$

لحرف:

$$\Gamma^{-1}: \pi \mathcal{L}(X, A_i) \rightarrow \mathcal{L}(X, A)$$

$$\Gamma^{-1}((u_i)_{i \in I}) = \infty \quad , \quad u_i \cdot \infty = u_i, \quad \forall i \in I$$

وذلك حسب الحفظ التبادلي:

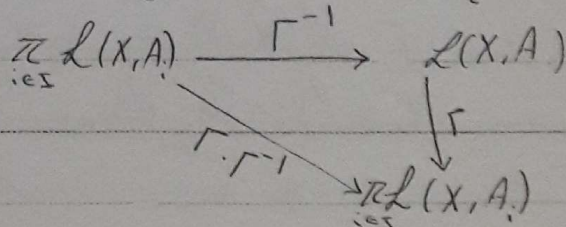


سبب التعريف فإن  $\infty$  وحيد

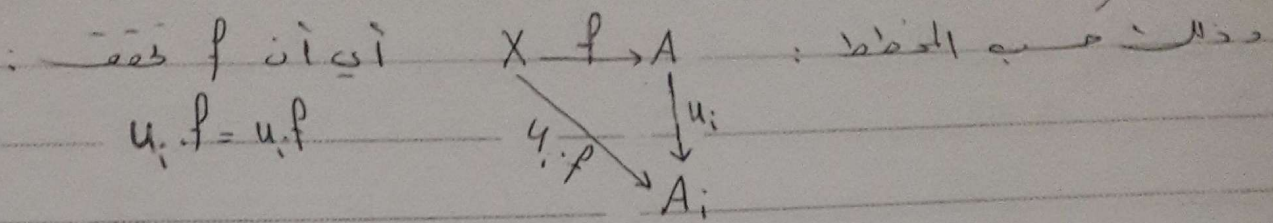
إن  $\Gamma^{-1}$  تطبيقه سببه كون المورفين  $\infty$  وحيد

لنبرهن على أن:  $\Gamma \cdot \Gamma^{-1} = I_{\pi \mathcal{L}(X, A)}$  و  $\Gamma^{-1} \cdot \Gamma = I_{\mathcal{L}(X, A)}$

ملاحظة: إن  $\Gamma \cdot \Gamma^{-1}$  ينطبق الطائفة على مطلق  $\Gamma^{-1}$  وذلك لأن



ان  $\Gamma^{-1} \cdot \Gamma = I$  لان  $\Gamma^{-1} \cdot \Gamma = I_{\mathcal{L}(X,A)}$   
 $\forall f \in \mathcal{L}(X,A) : \Gamma^{-1} \cdot \Gamma(f) = \Gamma^{-1}(\Gamma(f)) = \Gamma^{-1}((u_i \cdot f)_{i \in I}) = f$   
 حسب تعريف  $\Gamma$



$\Rightarrow \Gamma^{-1} \cdot \Gamma(f) = f \Rightarrow \Gamma^{-1} \cdot \Gamma = I_{\mathcal{L}(X,A)}$

ان  $\Gamma \cdot \Gamma^{-1} = I$  لان  $\Gamma \cdot \Gamma^{-1} = I_{\pi \mathcal{L}(X,A_i)}$   
 $\forall (w_i)_{i \in I} \in \pi \mathcal{L}(X,A_i) : \Gamma \cdot \Gamma^{-1}((w_i)_{i \in I}) = \Gamma(\Gamma^{-1}((w_i)_{i \in I}))$   
 $= \Gamma(\infty) = (u_i \cdot \infty)_{i \in I} = w_i$   
 حسب تعريف  $\Gamma$   
 $\Rightarrow \Gamma \cdot \Gamma^{-1}((w_i)_{i \in I}) = w_i \Rightarrow \Gamma \cdot \Gamma^{-1} = I_{\pi \mathcal{L}(X,A_i)}$   
 ومنه

وهكذا نجد ان التصفية  $\Gamma$  متباين دعامر  
 توصيفي، اذ ان  $\Gamma$  ايضاً موريزم وذلك لان  $\Gamma$  موريزم وايضاً موريزم  
 مما ان لدينا  $\mathcal{L}(Y,A)$  و  $\pi \mathcal{L}(X,A_i)$  مجموعتين  
 موريزم  $\Leftrightarrow \Gamma$  متباين ،  $\Gamma$  ايضاً موريزم  $\Leftrightarrow \Gamma$  دعامر

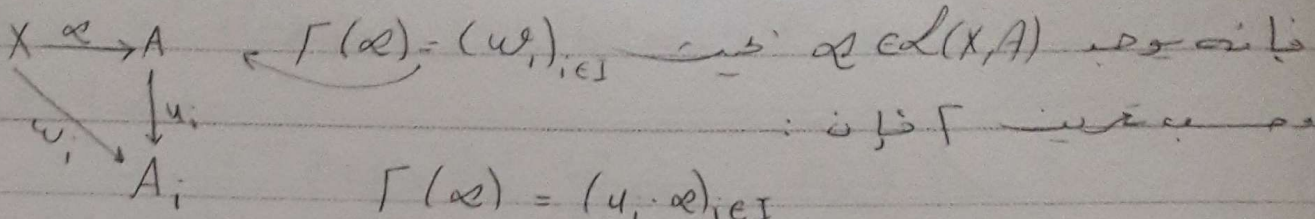
من (2)  $\Leftrightarrow$  (1) ، لانه على ان التساوية  $(A, (u_i)_{i \in I})$  حرد لا أسرة  
 الأشياء  $(A_i)_{i \in I}$  ، ليكن  $X \in \text{ob}(\mathcal{L})$  وليكن  $(w_i : X \rightarrow A_i)_{i \in I}$  أسرة  
 من موريزمات الفئة  $\mathcal{L}$ .

لدينا من هنا :  $\Gamma : \mathcal{L}(X,A) \rightarrow \pi \mathcal{L}(X,A_i)$

$\Gamma(f) = (u_i \cdot f)_{i \in I}$

متباين دعامر .

ولمكان  $\Gamma: \mathcal{L}(X, A_i) \rightarrow \mathcal{L}(X, A)$  والتطبيق  $\Gamma$  عامر



$$\Gamma(\alpha) = (u_i \cdot \alpha)_{i \in I}$$

ولهذا أن:

$$(u_i \cdot \alpha)_{i \in I} = (w_i)_{i \in I}$$

بمعنى أن  $\alpha = \beta$  حيث  $\beta \in \mathcal{L}(X, A)$

ليكن  $\beta \in \mathcal{L}(X, A)$  حيث  $u_i \cdot \beta = w_i$  وذلك لأجل كل  $i \in I$

لدينا:  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(X, A)$  أي من نظمت  $\Gamma$

$$\Gamma(\alpha) = (u_i \cdot \alpha)_{i \in I} = (w_i)_{i \in I} = (u_i \cdot \beta)_{i \in I} = \Gamma(\beta)$$

ولمكان  $\Gamma$  متباين حيث أن:

وهذا فإن النتيجة  $(A, (u_i)_{i \in I})$  تشكل حواء الأسرة  $(A_i)_{i \in I}$

مبرهنة:

لتكن  $\mathcal{L}$  فئة  $(A_i)_{i \in I}$  أسرة من أشياء الفئة  $\mathcal{L}$  لنفرض

أن كلا من  $(A, (u_i)_{i \in I})$  حواء للأسرة  $(A_i)_{i \in I}$

عندئذ يوجد  $\alpha: A \rightarrow B$  وحيد

المرهان:

لمكانت النتيجة  $(A, (u_i)_{i \in I})$  حواء للأسرة  $(A_i)_{i \in I}$  عندئذ:

لأجل أسرة المرشحات  $(v_i: B \rightarrow A)_{i \in I}$  فإنه يوجد مورشم

وحيد  $\beta: B \rightarrow A$  حيث:  $u_i \cdot \beta = v_i$   $\forall i \in I$

أيضا لمكانت النتيجة  $(B, (v_i)_{i \in I})$  حواء للأسرة  $(A_i)_{i \in I}$  عندئذ:

لأجل أسرة المرشحات  $(u_i: A \rightarrow A_i)_{i \in I}$  فإنه يوجد مورشم

وحيد  $\alpha: A \rightarrow B$  حيث:  $v_i \cdot \alpha = u_i$   $\forall i \in I$

بقي برهان  $\beta \cdot \alpha = I_A$  ,  $\alpha \cdot \beta = I_B$   
 لما كانت التناحية  $(A, (u_i)_{i \in I})$  حداثاً لأسرة الأسياء  $(A_i)_{i \in I}$   
 فإن التطبيق :

$$\Gamma : \mathcal{L}(X, A) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{L}(X, A_i)$$

$$\Gamma(f) = (u_i \cdot f)_{i \in I} \quad \forall f \in \mathcal{L}(X, A)$$

متباين دغار ذلك لأجل كل  $X \in \text{ob}(\mathcal{A})$

ومن أجل  $X = A$  فإن :

$$\beta \cdot \alpha \in \mathcal{L}(A, A)$$

$$\Gamma(\beta \cdot \alpha) = (u_i \cdot (\beta \cdot \alpha))_{i \in I}$$

$$= ((u_i \cdot \beta) \cdot \alpha)_{i \in I} = (v_i \cdot \alpha)_{i \in I} = (u_i)_{i \in I}$$

$$\Gamma(I_A) = (u_i \cdot I_A)_{i \in I} = (u_i)_{i \in I}$$

$$\Gamma(\beta \cdot \alpha) = \Gamma(I_A)$$

$$\beta \cdot \alpha = I_A$$

أيضاً لما كانت التناحية  $(B, (v_i)_{i \in I})$  حداثاً لأسرة الأسياء  $(A_i)_{i \in I}$  فإن  
 التطبيق :

$$\Gamma' : \mathcal{L}(X, B) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{L}(X, A_i)$$

$$\Gamma'(g) = (v_i \cdot g)_{i \in I} \quad \forall g \in \mathcal{L}(X, B)$$

متباين دغار ذلك لأجل كل  $X \in \text{ob}(\mathcal{A})$

لأجل  $X = B$  فإن :

$$\alpha \cdot \beta \in \mathcal{L}(B, B)$$

$$\Gamma'(\alpha \cdot \beta) = (v_i \cdot (\alpha \cdot \beta))_{i \in I} = ((v_i \cdot \alpha) \cdot \beta)_{i \in I} = (u_i)_{i \in I}$$

$$= (u_i \cdot \beta)_{i \in I} = (v_i)_{i \in I}$$

وأن:  $\Gamma^{-1}(I_B) = (\alpha_i, I_B)_{i \in I} = (\alpha_i)_{i \in I}$

دالة ج:

$$\Gamma^{-1}(\alpha \cdot \beta) = \Gamma^{-1}(I_B)$$

ولما كان  $\Gamma$  متباين ج أن:

$$\alpha \cdot \beta = I_B$$

وهذا يعني أن  $\alpha$  و  $\beta$  ليسا صفرين

تعريف:

لتكون مجموعة  $(A_i)_{i \in I}$  أسرة من الأشياء، لفتحة  $\alpha$  إذا كانت لنتيجة  $(A, (U, A \rightarrow A))_{i \in I}$  والأشياء  $(A_i)_{i \in I}$ ، هي المرصيات  $U_i$  بالمرصيات  $\alpha$  الإماطة.

انتهت المحاضرة

