الجداءات.

إن مفهوم الجداءات في الفئات هو تعميم لمفهوم الجداء الديكارتي.

تعريف:

لتكن $\mathcal{L}$ فئة، و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$، ولتكن $(u_i : A \to A_i)_{i\in I}$ أسرة من المورفيزمات من الفئة $\mathcal{L}$ حيث $A \in ob(\mathcal{L})$.

نقول أن الثنائية $(A,(u_i)_{i\in I})$ أنها تشكل جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ إذا كان لأجل أي أسرة أخرى $(v_i : B \to A_i)_{i\in I}$ من مورفيزمات الفئة $\mathcal{L}$ يوجد مورفيزم وحيد $\alpha : B \to A$ يحقق:

$$u_i \cdot \alpha = v_i \qquad \forall i \in I$$

أي أن $(u_i \cdot \alpha)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$

نبين ذلك حسب المخطط التالي:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "v_i"'] & A \arrow[dl, "u_i"] \\ A_i & \end{tikzcd}$$

مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$، ولنفرض أن $A \in ob(\mathcal{L})$ وأن $(u_i : A \to A_i)_{i\in I}$ أسرة من مورفيزمات الفئة $\mathcal{L}$، الشروط الآتية متكافئة:

1- الثنائية $(A,(u_i)_{i\in I})$ تشكل جداء لأسرة الأشياء $(A_i)_{i\in I}$

2- لأجل كل $X \in ob(\mathcal{L})$ فإن التطبيق:

$$\Gamma : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{L}(X,A_i)$$

المعرف بالشكل: $\Gamma(f) = (u_i \cdot f)_{i\in I}$

$\forall f \in \mathcal{L}(X,A)$ متباين وغامر

ملاحظة: إن $\mathcal{L}(X,A)$ هي مجموعة وبالتالي $\prod \mathcal{L}(X,A_i)$ هي جداء ديكارتي لمجموعة فهو مجموعة.

البرهان: من $(1) \Rightarrow (2)$

لنفرض أن الثنائية $(A,(u_i)_{i\in I})$ جداء لأسرة الأشياء $(A_i)_{i\in I}$

- إن Γ متباينة لأن:

لأجل كل $f,g\in\mathcal{L}(X,A)$ بحيث:

$$f = g \Rightarrow$$

$$u_i\cdot f = u_i\cdot g \quad \forall i\in I$$

$$(u_i\cdot f)_{i\in I} = (u_i\cdot g)_{i\in I}$$

$$\Gamma(f) = \Gamma(g)$$

- لنعرف:

$$\Gamma^{-1}: \prod_{i\in I}\mathcal{L}(X,A_i)\longrightarrow\mathcal{L}(X,A)$$

$\Gamma^{-1}((w_i)_{i\in I}) = \varphi$ و $u_i\cdot\varphi = w_i \ , \forall i\in I$

وذلك حسب المخطط التبديلي:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "w_i"'] & A \arrow[d, "u_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

حسب التعريف فإن φ وحيد.

إن Γ^{-1} تطبيق بسبب كون المورفيزم φ وحيد.

- لنبرهن على أن: $\Gamma\cdot\Gamma^{-1} = I_{\prod\mathcal{L}(X,A_i)}$ و $\Gamma^{-1}\cdot\Gamma = I_{\mathcal{L}(X,A)}$

ملاحظة: إن $\Gamma\cdot\Gamma^{-1}$ يعطي التطابق على مجال Γ^{-1} وذلك لأن

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in I}\mathcal{L}(X,A_i) \arrow[r, "\Gamma^{-1}"] \arrow[dr, "\Gamma\cdot\Gamma^{-1}"'] & \mathcal{L}(X,A) \arrow[d, "\Gamma"] \\ & \prod_{i\in I}\mathcal{L}(X,A_i) \end{tikzcd}$$

إن $\Gamma^{-1}.\Gamma = I_{\mathcal{L}(X,A)}$ لأن :

$$\forall f \in \mathcal{L}(X,A) : \Gamma^{-1}.\Gamma(f) = \Gamma^{-1}(\Gamma(f)) \underset{\text{حسب تعريف } \Gamma}{=} \Gamma^{-1}((u_i.f)_{i\in I}) = f$$

وذلك حسب المخطط :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "u_i.f"'] & A \arrow[d, "u_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

أي أن f تحقق :

$$u_i.f = u_i.f$$

$$\Rightarrow \Gamma^{-1}.\Gamma(f) = f \Rightarrow \Gamma^{-1}.\Gamma = I_{\mathcal{L}(X,A)}$$

إن $\Gamma.\Gamma^{-1} = I_{\pi\mathcal{L}(X,A_i)}$ لأن :

$$\forall (w_i)_{i\in I} \in \underset{i\in I}{\pi} \mathcal{L}(X,A_i) : \Gamma.\Gamma^{-1}((w_i)_{i\in I}) = \Gamma(\Gamma^{-1}(w_i)_{i\in I})$$

$$= \Gamma(\alpha) \underset{\text{حسب تعريف } \Gamma}{=} (u_i.\alpha)_{i\in I} = w_i$$

حيث $u_i.\alpha = w_i \quad \forall i \in I$

ومنه

$$\Rightarrow \Gamma.\Gamma^{-1}((w_i)_{i\in I}) = w_i \Rightarrow \Gamma.\Gamma^{-1} = I_{\pi\mathcal{L}(X,A)}$$

وهكذا نجد أن التطبيق Γ متباين وغامر .

توضيح : أثبتنا أن Γ إيزومورفيزم وذلك علماً أنه مونومورفيزم وإيبيمورفيزم وبما أن لدينا $\mathcal{L}(Y,A)$ و $\pi\mathcal{L}(XA_i)$ مجموعات فيكون :

Γ مونومورفيزم $\Leftrightarrow$ Γ متباين ، Γ إيبيمورفيزم $\Leftrightarrow$ Γ غامر .

من $(2) \Rightarrow (1)$: لنبرهن على أن الثنائية $(A,(u_i)_{i\in I})$ جداء لأسرة الأشياء $(A_i)_{i\in I}$ ، ليكن $X \in ob(\mathcal{L})$ ولتكن $(w_i : X \longrightarrow A_i)_{i\in I}$ أسرة من مورفيزمات الفئة $\mathcal{L}$.

لدينا هنا :

$$\Gamma : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \pi\mathcal{L}(X,A_i)$$

$$\Gamma(f) = (u_i.f)_{i\in I}$$

متباين وغامر .

وبما أن: $(w_i)_{i\in I} \in \pi\mathcal{L}(X,A_i)$ والتطبيق Γ غامر.

فإنه يوجد $\alpha \in \mathcal{L}(X,A)$ بحيث $\Gamma(\alpha)=(w_i)_{i\in I}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "w_i"'] & A \arrow[d, "u_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

ومن تعريف Γ فإن:

$$\Gamma(\alpha)=(u_i\cdot\alpha)_{i\in I}$$

ومنه نجد أن:

$$(u_i\cdot\alpha)_{i\in I}=(w_i)_{i\in I}$$

- بقي إثبات أن α وحيد:

ليكن $\beta\in\mathcal{L}(X,A)$ بحيث $u_i\cdot\beta=w_i$ وذلك لأجل كل $i\in I$

لدينا: $\alpha,\beta\in\mathcal{L}(X,A)$ أي من منطلق Γ.

$$\Gamma(\alpha)=(u_i\cdot\alpha)_{i\in I}=(w_i)_{i\in I}=(u_i\cdot\beta)_{i\in I}=\Gamma(\beta)$$

وبما أن Γ متباين نجد أن:

$$\alpha=\beta$$

وهكذا فإن الثنائية $(A,(u_i)_{i\in I})$ تشكل جداء لأسرة الأشياء $(A_i)_{i\in I}$.

مبرهنة:

لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$ لنفرض أن كلاً من $(B,(v_i)_{i\in I})$, $(A,(u_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ عندئذٍ يوجد إيزومورفيزم وحيد $\alpha: A\to B$.

البرهان:

لما كانت الثنائية $(A,(U_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ عندئذٍ:
لأجل أسرة المورفيزمات $(v_i: B\to A_i)_{i\in I}$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\beta: B\to A$ بحيث: $u_i\cdot\beta=v_i \quad \forall i\in I$

- أيضاً لما كانت الثنائية $(B,(v_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ عندئذٍ:
لأجل أسرة المورفيزمات $(u_i: A\to A_i)_{i\in I}$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\alpha: A\to B$ بحيث: $v_i\cdot\alpha=u_i \quad \forall i\in I$

بقي برهان $\alpha \cdot \beta = I_B$ ، $\beta \cdot \alpha = I_A$

لما كانت الثنائية $(A, (u_i)_{i\in I})$ جداءً لأسرة الأشياء $(A_i)_{i\in I}$

فإن التطبيق :

$$\Gamma : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{L}(X,A_i)$$

$$\Gamma(f) = (u_i \cdot f)_{i\in I} \qquad \forall f \in \mathcal{L}(X,A)$$

متباين دوماً وذلك لأجل كل $X \in ob(\mathcal{L})$.

ومن أجل $X = A$ نجد أن :

$$\beta \cdot \alpha \in \mathcal{L}(A,A)$$

$$\Gamma(\beta \cdot \alpha) = (u_i(\beta \cdot \alpha))_{i\in I}$$

$$= ((u_i \cdot \beta)\alpha)_{i\in I} = (v_i \cdot \alpha)_{i\in I} = (u_i)_{i\in I}$$

ولكن :

وإن :

$$\Gamma(I_A) = (u_i \cdot I_A)_{i\in I} = (u_i)_{i\in I}$$

ومنه نجد أن .

$$\Gamma(\beta \cdot \alpha) = \Gamma(I_A)$$

وبما أن Γ متباين $\Leftarrow$

$$\beta \cdot \alpha = I_A$$

أيضاً لما كانت الثنائية $(B, (v_i)_{i\in I})$ جداءً لأسرة الأشياء $(A_i)_{i\in I}$ فإن

التطبيق :

$$\Gamma' : \mathcal{L}(X,B) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{L}(X,A_i)$$

$$\Gamma'(g) = (v_i \cdot g)_{i\in I} \qquad \forall g \in \mathcal{L}(X,B)$$

متباين دوماً وذلك لأجل كل $X \in ob(\mathcal{L})$

لأجل $X = B$ نجد أن :

$$\alpha \cdot \beta \in \mathcal{L}(B,B)$$

وإن

$$\Gamma'(\alpha \cdot \beta) = (v_i(\alpha \cdot \beta))_{i\in I} = ((v_i \cdot \alpha)\beta)_{i\in I} =$$

$$= (u_i \cdot \beta)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$$

وأن:

$$\Gamma'(I_B) = (v_i \cdot I_B)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$$

ومنه نجد:

$$\Gamma'(\alpha\cdot\beta) = \Gamma'(I_B)$$

ولما كان Γ' متباين نجد أن:

$$\alpha\cdot\beta = I_B$$

ومنه نجد أن هو إيزومورفيزم.

تعريف:

لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$ ، إذا كانت الثنائية $(A,(U_i: A\to A_i)_{i\in I})$ جداء لأسرة الأشياء $(A_i)_{i\in I}$ ، نسمي المورفيزمات U_i بالمورفيزمات الإسقاطية.

انتهت المحاضرة